

An application of the Finite Difference Method for Solving the Mass Spring System Equation

Suatu Penerapan Metode Beda Hingga Untuk Menyelesaikan Persamaan Sistem Pegas Massa

Gabariela Purnama Ningsi*¹, Fransiskus Nendi*², Lana Sugiarti*³

Abstract

The numerical method is one method that can be used to solve differential equations, both differential equations that are easy or difficult to solve analytically. The solution obtained from the calculation results is an approximate solution or a solution that approaches an analytic solution, not an analytic solution. That is, in solving differential equations numerically, there is always an error. In this paper, an analytical solution is described and described and the application of different methods in solving a damped mass spring system with a known limit value. The error between the analytic and numerical solutions obtained is very small.

Keywords: Numerical Method, Finite Difference Method, Mass Spring System, Error

Abstrak

Metode numerik merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik persamaan diferensial yang mudah maupun yang sulit untuk diselesaikan secara analitik. Solusi yang diperoleh dari hasil perhitungan merupakan sebuah solusi perkiraan atau solusi yang mendekati solusi analitik, bukan merupakan solusi analitik. Artinya, dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik, selalu terdapat error. Dalam paper ini dijelaskan dan diuraikan penyelesaian secara analitik dan penerapan metode beda hinggadalam menyelesaikan sistem pegas massa teredam dengan nilai batas yang diketahui. Error antara solusi analitik dan numerik yang diperoleh sangat kecil.

Kata kunci: Metode numerik, Metode Beda Hingga, Sistem Pegas Massa, Error

1. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu bidang ilmu yang manfaatnya sangat besar dalam seluruh sektor kehidupan, baik dalam bidang ekonomi, teknik, kedokteran, sosial, maupun bidang yang lain [1]. Salah satu kajian dalam ilmu matematika yang juga berkaitan dalam sektor kehidupan dan bidang ilmu lain adalah kajian tentang persamaan diferensial. Persamaan diferensial dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu dalam matematika maupun bidang ilmu lain seperti

teknik, ekonomi dan bidang kesehatan [2]. Salah satu masalah dalam bidang teknik yang dapat diselesaikan dengan ilmu matematika adalah masalah tentang sistem pegas massa.

Dalam menyelesaikan masalah sistem pegas massa ini, terlebih dahulu dimodelkan masalah tersebut menjadi sebuah model matematika. Model matematika dibentuk dari hasil deksripsi perilaku masalah nyata ke dalam bahasa matematika, kemudian bentuk matematika tersebut diselesaikan secara simbolik, dan solusinya ditafsirkan kembali untuk menjelaskan perilaku masalah yang sebenarnya [3]. Model matematika yang akan diperoleh berbentuk persamaan diferensial. Untuk mencari solusi persamaan diferensial yang dibentuk, penyelesaiannya dapat dilakukan secara analitik dan metode numerik. Dalam menyelesaikan persamaan diferensial yang memiliki bentuk yang rumit sangat sulit diselesaikan secara analitik, maka alternatif penyelesaian persamaan diferensial dilakukan dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerik [4] merupakan sebuah teknik untuk mencari solusi dari masalah yang sudah dimodelkan dalam bentuk matematis. Solusi yang dihasilkan dalam proses penyelesaian tersebut akan berupa sebuah solusi perkiraan atau solusi yang mendekati solusi analitis. Terdapat berbagai metode numerik yang dapat kita gunakan dalam menyelesaikan masalah, tergantung dari jenis dan tujuan masalah yang ingin diselesaikan tersebut. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan sistem pegas massa adalah metode beda hingga.

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan masalah matematika dari suatu gejala fisis, dimana prinsipnya adalah mengganti turunan yang terdapat dalam persamaan diferensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor [5].

Metode beda hingga akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang telah dimodelkan dengan menerapkan beberapa kondisi batas yang telah ditetapkan sebelumnya. Karena solusi dari hasil perhitungan numerik merupakan sebuah perkiraan atau solusi pendekatan, maka akan ditemukan galat perhitungan numerik. Metode beda hingga telah banyak digunakan oleh para peneliti terdahulu untuk menyelesaikan persoalan dunia nyata. Adapun beberapa penelitian yang telah dilakukan adalah penelitian yang dilakukan oleh Hasan, dkk. yang membahas tentang "penerapan metode beda hingga pada model matematika aliran banjir dari persamaan saint venant" [5], penelitian yang dilakukan oleh Bambang yang membahas tentang "aplikasi metode beda hingga skema eksplisit pada persamaan konduksi panas" [6]. Selain itu, terdapat juga skripsi yang ditulis oleh Nursyamsu [7] pada tahun 2013 yang membahas tentang "Penentuan Harga Opsi untuk Model Black Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga". Berdasarkan penelitian terdahulu tersebut, maka peneliti tertarik untuk membuat penelitian tentang penerapan metode beda hingga dalam menyelesaikan persamaan sistem pegas massa.

2. Tinjauan Pustaka

a. Metode Beda Hingga

Metode Beda Hingga merupakan salah satu metode numerik yang umum digunakan untuk menghitung pendekatan turunan dari sebuah fungsi. Dalam metode bedahingga, turunan dari setiap persamaan diferensial akan diubah kedalam bentuk persamaan differensial dengan menerapkan formula deret Taylor.

Dalam [8] dikatakan bahwa, jika $f(x)$ serta semua turunannya $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$, di dalam selang $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$, maka nilai x di mana $x \in [a, b]$ di sekitar x_0 dapat diekspansi ke dalam deret Taylor yaitu sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x - x_0}{1!} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (1.1)$$

Jika $x - x_0 = h$, $a < x_0$, serta $x_0 + h < b$, maka $f(x)$ maka persamaan (1.1) akan menjadi persamaan berikut:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (1.2)$$

Jika persamaan (1.2) di atas diperluas maju untuk menghitung nilai sesudah nilai sekarang maka formula deret Taylornya adalah deret Taylor dari sebuah fungsi $f(x + \Delta x)$ di sekitar titik x diperoleh sebagai berikut [5]:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \Delta x^3 + \dots \quad (1.3)$$

Formula deret Taylor dari sebuah fungsi $f(x - \Delta x)$ di sekitar diperoleh sebagai berikut:

$$f(x - \Delta x) = f(x) + f'(x)(-\Delta x) + \frac{f''(x)}{2!} (-\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (-\Delta x)^3 + \dots \quad (1.4)$$

Dari persamaan (1.3) akan diperoleh turunan pertama seperti persamaan berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O\Delta x \quad (1.5)$$

Atau dari persamaan (1.4) diperoleh turunan pertama sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O\Delta x \quad (1.6)$$

Persamaan (1.5) merupakan turunan numerik bedamaju sedangkan persamaan (1.6) adalah turunan numerik beda mundur. Persamaan (1.5) dan (1.6) di atas merupakan turunan numerik orde pertama, dengan tingkat keakuratan tingkat 1. Selanjutnya dari persamaan (1.3) dan (1.4) diperoleh turunan numerik beda pusat dengan tingkat keakuratan tingkat 2, yaitu sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O\Delta x^2 \quad (1.7)$$

Untuk memperoleh nilai pendekatan turunan kedua dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan persamaan (1.3) dan (1.4) sehingga diperoleh:

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + f''(x)\Delta x^2 + O\Delta x^2 \quad (1.8)$$

Sehingga diperoleh:

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O\Delta x^2 \quad (1.9)$$

Persamaan (1.9) disebut turunan numerik kedua beda pusat.

Jika x pada persamaan (1.5), (1.6), dan (1.7) di atas diganti dengan $x = x_0 + i\Delta x$ dengan i adalah bilangan bulat dan $f(x) \approx f(x_0 + i\Delta x)$, maka persamaan (1.5), (1.6), dan (1.7) akan menjadi:

$$f' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (1.10)$$

$$f' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (1.11)$$

$$f' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (1.12)$$

Sedangkan persamaan (1.9) akan menjadi seperti berikut:

$$f'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (1.13)$$

Ketika persamaan (1.10) – (1.13) diamati dalam selang interval $[x_0, x_N]$ maka dapat diperoleh

$$\Delta x = \frac{x_N - x_0}{N}$$

adalah sebuah panjang interval yang membagi selang tersebut dalam N bagian sama panjang.

b. Sistem Pegas Massa

Devaney [9] mengatakan bahwa bentuk umum persamaan diferensial orde dua adalah sebagai berikut:

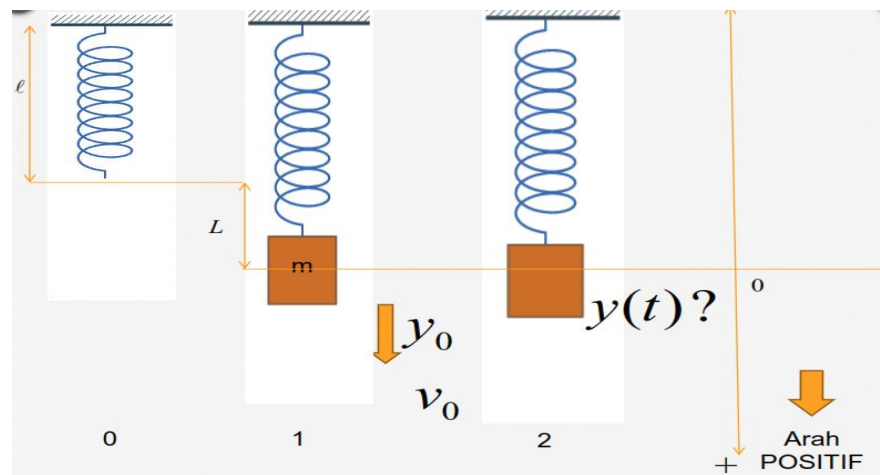
$$y'' + ay' + by = G(t) \quad (1.14)$$

Dengan a dan b adalah koefisien dari persamaan diferensial tersebut. Persamaan diferensial di atas merupakan sebuah persamaan diferensial orde dua non homogen dengan koefisien konstan. Jika $G(t) = 0$, maka persamaan tersebut akan menjadi sebuah persamaan diferensial orde dua homogen. Persamaan diferensial biasa linear orde dua homogeny dengan koefisien konstan memiliki bentuk umum seperti berikut ini:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1.15)$$

Dimana a dan b merupakan konstanta sebarang.

Pada sistem pegas massa, kita dapat merumuskan atau memodelkan persamaan diferensial yang menyatakan posisi massa dengan memperhatikan gaya yang bekerja pada gerak massa tersebut. Jika sistem pegas massa yang dimaksud seperti pada gambar berikut:



Gambar 1. Sistem pegas massa vertical [10]

Gaya yang dihasilkan akibat pergerakan massa tersebut sesuai dengan Hukum II Newton yaitu sama dengan massa dikali dengan percepatannya, dapat ditulis [9]: $\sum F = m \cdot a$, dengan $a = \frac{d^2y}{dt^2} = y''$ dan m adalah massa benda. Sehingga,

$$\sum F = m \cdot y'' \quad (1.16)$$

Ada dua gaya yang bekerja pada massa tersebut [10], yaitu:

- 1) Gaya pegas. Hukum Hooke mengatakan bahwa gaya yang diberikan oleh pegas sebanding dengan perpindahan massa dari posisi diam, dapat ditulis:

$$F_p = -ky, k > 0 \quad (1.17)$$

dengan k adalah konstanta pegas, y adalah posisi massa.

- 2) Gaya gesek. Untuk gaya akibat gesekan ini kita asumsikan bahwa gaya tersebut sebanding dengan kecepatan gerak massa, yang dapat ditulis:

$$F_g = -by' \quad (1.18)$$

dimana b merupakan konstanta redaman atau gesekan dan y' merupakan kecepatan massa. Ada dua kasus untuk konstanta redaman yang dapat kita amati, yaitu:

- Ketika $b = 0$, maka tidak ada gesekan (maka massa tidak akan kembali ke posisi diam).
- Ketika $b > 0$, maka ada gesekan (massa akan kembali ke posisi diam atau posisi setimbang).

Karena gaya yang bekerja pada gerak massa adalah gaya pegas dan gaya gesek, maka dari persamaan (1.16), (1.17), dan (1.18) diperoleh besarnya gaya yang bekerja pada pergerakan massa tersebut adalah:

$$\begin{aligned} \sum F &= my'' \\ F_p + F_g &= my'' \\ -ky - by' &= my'' \\ my'' + by' + ky &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh model persamaan diferensial homogen orde dua untuk sistem pegas massa yaitu:

$$my'' + by' + ky = 0$$

atau

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (1.19)$$

Dimana, b dan k adalah parameter konstanta. Dengan:

- y : besar perpindahan massa,
- m : massa benda yang digantungkan pada pegas,
- b : konstanta redaman pegas,
- k : konstanta pegas,
- y' : kecepatan gerak massa.

c. Penerapan Metode Beda Hingga Pada Sistem Pegas Massa

Misalkan $y(t)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (1.19) di atas dengan Δt merupakan perubahan posisi massa, dimana akan diamati dalam selang interval $[t_0, t_N]$ selanjutnya interval tersebut dipartisi sehingga diperoleh: $t_i = t_0 + i\Delta t$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots$ dan

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 < t_0 < t_0 < \dots < t_N \\ \Delta t &= \frac{t_N - t_0}{N} \end{aligned} \quad (1.20)$$

adalah sebuah panjang interval yang membagi selang tersebut dalam N bagian sama panjang [11]. Berdasarkan persamaan (1.12), (1.13) dan (1.20) maka dapat diperoleh kedua persamaan berikut [12]:

$$y'(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}))}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (1.21)$$

$$y''(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1}))}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (1.22)$$

Jika, $y(t_i) = y_i$, $y(t_{i+1}) = y_{i+1}$, dan $y(t_{i-1}) = y_{i-1}$ maka persamaan (1.21) dan (1.22) akan menjadi:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (1.23)$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (1.24)$$

Berdasarkan persamaan (1.19), (1.20), (1.23) dan (1.24) di atas maka dapat diperoleh pendekatan turunan kedua dari sistem pegas massa yang telah dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2} + \frac{b}{m} \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \right) + \frac{k}{m} y_i = 0 \quad (1.25)$$

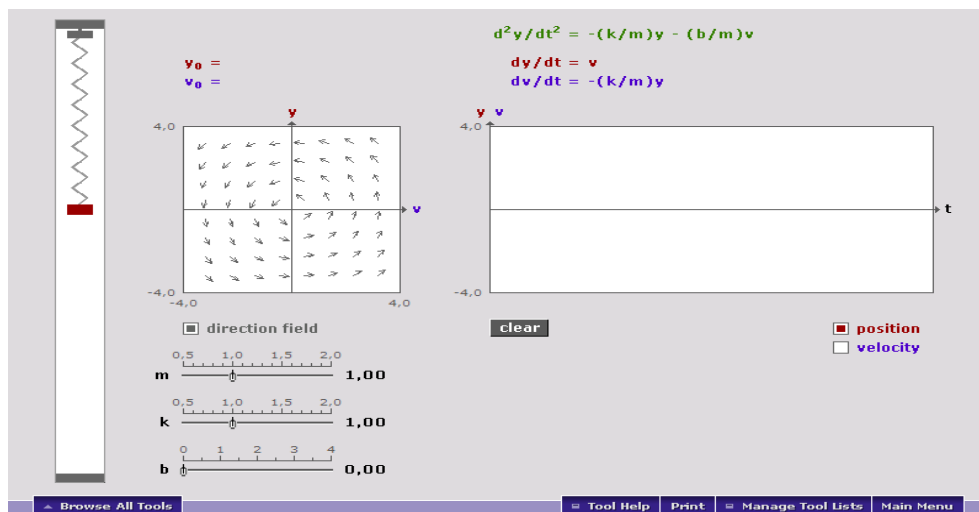
3. Hasil Penelitian

Persamaan diferensial orde dua pada sistem pegas massa biasanya dilengkapi dengan dua posisi awal dan kecepatan awal massa, yaitu:

$y(0) = y_0$, posisi massa ketika diam atau $t = 0$, dan $y'(0) = v'_0$, kecepatan awal massa ketika $t = 0$. Agar pergerakan massa dapat digambarkan, maka digunakan variable baru, yaitu: $v = y'$, maka $y'' = v' = -ky - bv$, atau dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -ky - bv \end{aligned} \quad (2.1)$$

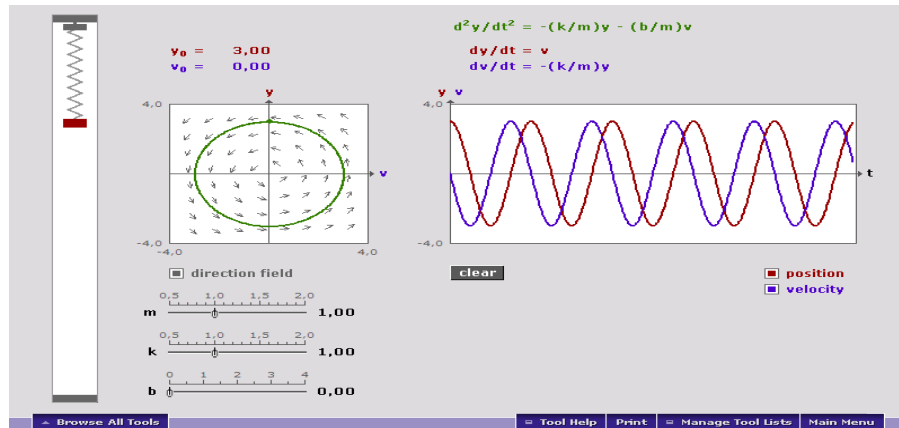
Dari persamaan (2.1) di atas, maka akan diperoleh grafik posisi dan kecepatan massa serta bidang fase pergerakan massa (diperoleh dengan menggunakan aplikasi DETools) seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 2. Grafik posisi dan kecepatan massa serta bidang fase pergerakan massa

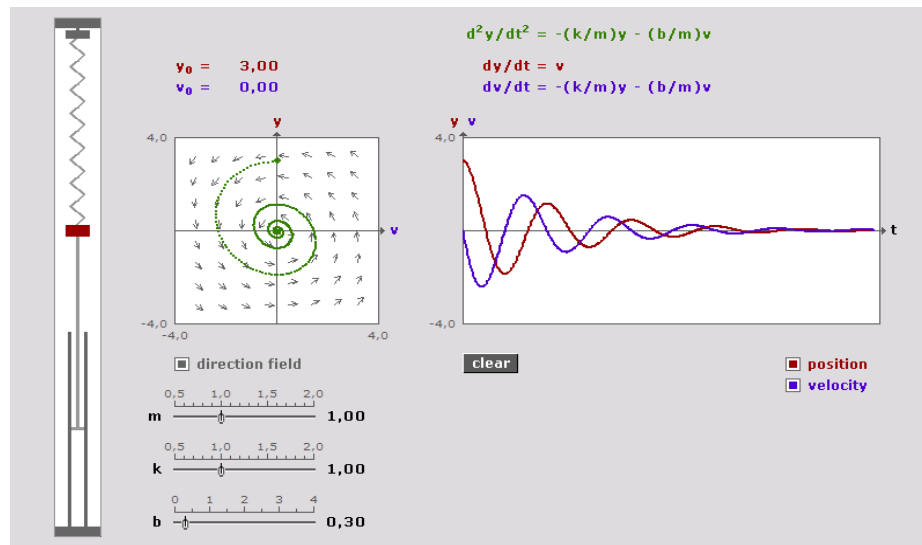
Terdapat dua kasus konstanta redaman yang dapat diamati dalam sistem pegas massa [9], yaitu:

1. Saat massa terus berosilasi, maka tidak ada gaya gesek dengan nilai $b = 0$. Grafik posisi dan kecepatan massa serta bidang fase pergerakan massa akan terlihat seperti gambar berikut:



Gambar 3. Grafik posisi dan kecepatan massa serta bidang fase pergerakan massa ketika $b = 0$

2. Saat massa dapat kembali ke posisi setimbang/diam atau berhenti berosilasi, hal ini terjadi ketika nilai $b > 0$. Grafik posisi dan kecepatan massa serta bidang fase pergerakan massa akan terlihat seperti gambar berikut:



Gambar 4. Grafik posisi dan kecepatan massa serta bidang fase pergerakan massa ketika $b > 0$

Dalam tulisan ini secara khusus dibahas tentang pergerakan massa ketika $b > 0$, dimana pergerakan massa dipengaruhi oleh gaya gesek yang akhirnya akan berhenti berosilasi dan kembali ke posisi diam. Berdasarkan persamaan sistem pegas massa yang telah dimodelkan secara analitik dan numerik (metode beda hingga) seperti pada persamaan (1.19) dan (1.25) di atas dengan b, m dan k merupakan konstanta riil, maka akan dicari penyelesaian secara analitik dan numerik dari sistem pegas massa teredam. Karena tulisan ini hanya secara khusus membahas tentang pergerakan massa ketika $b > 0$, maka penulis mengambil nilai b, m dan k secara acak, kemudian melihat perilaku solusi ketika nilai b, m dan k berturut-turut 0.9, 1.5, dan 26.8, serta t dihitung pada selang $[0,120]$ dengan panjang selang $N = 24$. Berdasarkan informasi yang diketahui tersebut, maka akan dihitung $y(t)$ secara analitik dan numerik.

a. Penyelesaian sistem pegas massa teredam secara analitik

Berdasarkan persamaan (1.19) dan nilai $b = 0.9, m = 1.5$ dan $k = 26.8$ diperoleh persamaan berikut:

$$1.5y'' + 0.9y' + 26.8y = 0 \quad (2.2)$$

Bentuk persamaan karakteristik dari persamaan (2.2) di atas adalah sebagai berikut:

$$1.5a^2 + 0.9a + 26.8 = 0 \quad (2.3)$$

Dengan $a \neq 0$. Akar dari persamaan (2.3) di atas adalah

$$a_1 = -0.3 + 4.216238i \text{ dan } a_2 = -0.3 - 4.216238i \quad (2.4)$$

Sehingga solusi umum dari persamaan (2.4) adalah sebagai berikut:

$$y(t) = e^{-0.3t}(c_1 \cos 4.216238t + c_2 \sin 4.216238t) \quad (2.5)$$

Jika diketahui nilai awal $y(0) = 0.56$ dan $y'(0) = 10$ maka dapat diperoleh nilai c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$c_1 = 0.56 \text{ dan } c_2 = 2.411629 \quad (2.6)$$

Sehingga diperoleh solusi khusus dari persamaan (2.5) dengan nilai awal yang telah diketahui adalah sebagai berikut:

$$y(t) = e^{-0.3t}(0.56 \cos 4.216238t + 2.411629 \sin 4.216238t) \quad (2.7)$$

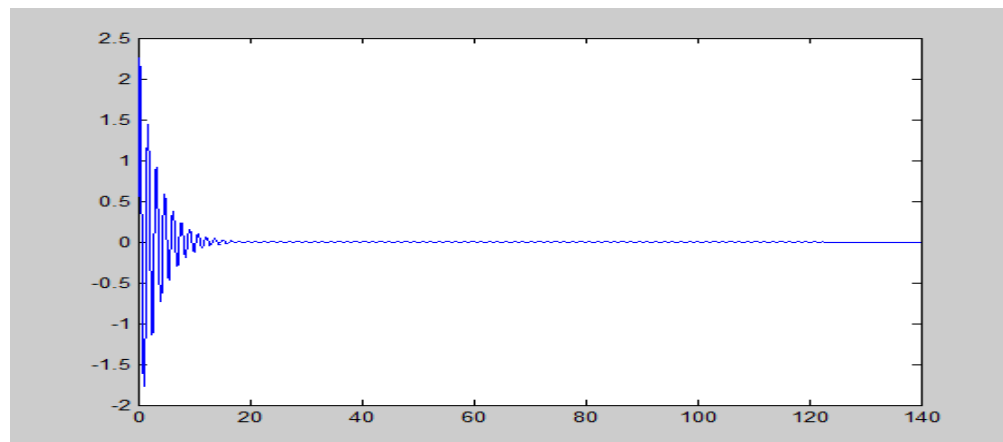
Hasil penyelesaian analitik dari persamaan (2.7) dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 1. Nilai Analitik Osilasi Pegas teredam
ketika $b = 0.9, m = 1.5, k = 26.8$ dan $y(0) = 0.56$

t	$y(t)$	t	$y(t)$	t	$y(t)$	t	$y(t)$
1	-1.768641552206420	31	-0.000192461767185	61	-0.000000005391654	91	0.00000000002026
2	0.940219060106037	32	-0.000009733363242	62	-0.000000015954442	92	-0.00000000002532
3	0.307445085593421	33	0.000112490917653	63	0.000000014212849	93	0.00000000000674
4	-0.732866897453655	34	-0.000074006373463	64	-0.000000001269390	94	0.000000000000914
5	0.348215735791228	35	-0.000009534160835	65	-0.000000006904783	95	-0.00000000001015
6	0.156583592006190	36	0.000047340707043	66	0.000000005567109	96	0.000000000000214
7	-0.301554825486156	37	-0.000028160440399	67	-0.00000000137468	97	0.000000000000406
8	0.126774003775306	38	-0.000006117491424	68	-0.000000002958328	98	-0.000000000000404
9	0.076073724621858	39	0.000019769896107	69	0.000000002162171	99	0.000000000000062
10	-0.123235467688281	40	-0.000010587818097	70	0.000000000098425	100	0.000000000000178
11	0.045176936277900	41	-0.000003381578563	71	-0.000000001256052	101	-0.000000000000159
12	0.035766427248101	42	0.000008195995006	72	0.000000000831969	102	0.000000000000015
13	-0.050022332325278	43	-0.000003925391238	73	0.000000000102487	103	0.000000000000077
14	0.015655415814644	44	-0.000001729188931	74	-0.000000000528886	104	-0.000000000000063
15	0.016409916451009	45	0.000003374025115	75	0.000000000316816	105	0.000000000000002
16	-0.020167001011486	46	-0.000001430950223	76	0.000000000066785	106	0.000000000000033
17	0.005219322910177	47	-0.000000842349315	77	-0.000000000220981	107	-0.000000000000024

18	0.007386310702262	48	0.000001379493348	78	0.000000000119222	108	-0.0000000000000001
19	-0.008074535877748	49	-0.000000510767487	79	0.000000000037181	109	0.0000000000000014
20	0.001641873541931	50	-0.000000396799951	80	-0.000000000091657	110	-0.0000000000000009
21	0.003273264514315	51	0.000000560207466	81	0.000000000044247	111	-0.0000000000000001
22	-0.003209954636824	52	-0.000000177387291	82	0.000000000019092	112	0.0000000000000006
23	0.000467812543821	53	-0.000000182324012	83	-0.000000000037750	113	-0.0000000000000004
24	0.001431677700974	54	0.000000225958808	84	0.000000000016150	114	-0.0000000000000001
25	-0.001266609040465	55	-0.000000059323904	85	0.000000000009326	115	0.0000000000000002
26	0.000107711567862	56	-0.000000082163290	86	-0.000000000015442	116	-0.0000000000000001
27	0.000619152851887	57	0.000000090513488	87	0.000000000005774	117	0.0000000000000000
28	-0.000495847619043	58	-0.000000018753682	88	0.000000000004402	118	0.0000000000000001
29	0.000009959675551	59	-0.000000036446498	89	-0.000000000006274	119	0.0000000000000000
30	0.000265101647947	60	0.000000036000647	90	0.000000000002010	120	0.0000000000000000

Dari tabel di atas, terlihat bahwa pegas berhenti berosilasi ketika waktu berada disekitar $t = 120$. Nilai regangan maksimum yang terjadi berdasarkan perhitungan tersebut adalah berada pada persekitaran 2.328642. Solusi analitik yang diperoleh pada persamaan (2.7) dapat digambarkan dalam bentuk grafik dengan menggunakan software *MATLAB* seperti yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 5. Grafik Solusi Analitik Persamaan Getaran Pegas Teredam

b. Penyelesaian sistem pegas massa teredam secara numerik

Berdasarkan persamaan (1.23), (1.24), (1.26) dan $\Delta t = \frac{t_{120}-t_0}{N}$, maka $\Delta t = \frac{120-0}{24} = 5$, maka dapat dibentuk persamaan pendekatan turunan kedua dari persamaan sistem pegas massa yang telah dimodelkan dengan menggunakan metode beda hingga sebagai berikut:

$$1.5 \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{5^2} \right) + 0.9 \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \times 5} \right) + 26.8y_i = 0$$

$$-0.03y_{i-1} + 26.68y_i + 0.15y_{i+1} = 0 \quad (2.8)$$

Dari persamaan (2.8) di atas, dapat diperoleh matriks A, B , dan C dengan $i = (1, 2, 3, \dots, 24)$ dan $y_0 = 0.56$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0.03 & 26.68 & 0.15 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0.03 & 26.68 & 0.15 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -0.03 & 26.68 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ matriks berordo } 25 \times 25 \quad (2.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{24} \end{bmatrix}, \text{ matriks berordo } 25 \times 1 \quad (2.10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ matriks berordo } 25 \times 1 \quad (3.11)$$

Dengan menggunakan *MATLAB* dapat diperoleh nilai matriks B berdasarkan persamaan (2.8), (2.9), dan (2.10) di atas seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 2. Solusi Numerik menggunakan metode beda hingga Osilasi Pegas teredam ketika $b = 0.9, m = 1.5, k = 26.8$ dan $y_0 = 0.56$ dengan rentangan selang $\Delta t = 5$

i	y_i	i	y_i
1	0.000629681176727	13	0.000000000000000
2	0.000000708032829	14	0.000000000000000
3	0.000000000796134	15	0.000000000000000
4	0.000000000000895	16	0.000000000000000
5	0.000000000000001	17	0.000000000000000
6	0.000000000000000	18	0.000000000000000
7	0.000000000000000	19	0.000000000000000
8	0.000000000000000	20	0.000000000000000
9	0.000000000000000	21	0.000000000000000
10	0.000000000000000	22	0.000000000000000
11	0.000000000000000	23	0.000000000000000
12	0.000000000000000	24	0.000000000000000

Dari tabel 2 di atas, dapat dilihat bahwa pegas akan berhenti berosilasi ketika nilai $i = 6$. Jika tabel 1 di atas dibuat dalam rentangan skala 5, maka akan diperoleh tabel berikut:

Tabel 3. Nilai Analitik Osilasi Pegas teredam ketika $b = 0.9, m = 1.5, k = 26.8$ dan $y_0 = 0.56$

t	$y(t)$	t	$y(t)$
5	0.348215735791228	65	-0.000000006904783
10	-0.123235467688281	70	0.00000000098425
15	0.016409916451009	75	0.00000000316816
20	0.001641873541931	80	-0.00000000091657
25	-0.001266609040465	85	0.00000000009326
30	0.000265101647947	90	0.00000000002010
35	-0.000009534160835	95	-0.00000000001015
40	-0.000010587818097	100	0.00000000000178
45	0.000003374025115	105	0.00000000000002
50	-0.000000396799951	110	-0.00000000000009
55	-0.000000059323904	115	0.00000000000002
60	0.000000036000647	120	0.00000000000000

c. Perbandingan nilai solusi analitik dan solusi numerik dengan menggunakan metode beda hingga

Berdasarkan Tabel 2 dan Tabel 3 di atas maka dapat diperoleh nilai perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik dengan menggunakan metode beda hingga sebagai berikut:

Tabel 4. Perbandingan Nilai solusi Analitik dan Numerik Osilasi Pegas Teredam ketika $b = 0.9, m = 1.5,$ dan $k = 26.8$ dengan menerapkan metode beda hingga

t	$y(t)$	I	y_i	Error
0	0.560000000000000	0	0.560000000000000	0.000000000000000
5	0.348215735791228	1	0.000629681176727	0.347586054614501
10	-0.123235467688281	2	0.000000708032829	0.123236175721110
15	0.016409916451009	3	0.000000000796134	0.016409915654875
20	0.001641873541931	4	0.00000000000895	0.001641873541036
25	-0.001266609040465	5	0.00000000000001	0.001266609040466
30	0.000265101647947	6	0.00000000000000	0.000265101647947
35	-0.000009534160835	7	0.00000000000000	0.000009534160835
40	-0.000010587818097	8	0.00000000000000	0.000010587818097
45	0.000003374025115	9	0.00000000000000	0.000003374025115
50	-0.000000396799951	10	0.00000000000000	0.000000396799951
55	-0.000000059323904	11	0.00000000000000	0.000000059323904
60	0.000000036000647	12	0.00000000000000	0.000000036000647
65	-0.000000006904783	13	0.00000000000000	0.000000006904783
70	0.00000000098425	14	0.00000000000000	0.00000000098425

75	0.000000000316816	15	0.000000000000000	0.000000000316816
80	-0.000000000091657	16	0.000000000000000	0.000000000091657
85	0.00000000009326	17	0.000000000000000	0.00000000009326
90	0.00000000002010	18	0.000000000000000	0.00000000002010
95	-0.00000000001015	19	0.000000000000000	0.00000000001015
100	0.00000000000178	20	0.000000000000000	0.00000000000178
105	0.000000000000002	21	0.000000000000000	0.000000000000002
110	-0.000000000000009	22	0.000000000000000	0.000000000000009
115	0.000000000000002	23	0.000000000000000	0.000000000000002
120	0.000000000000000	24	0.000000000000000	0.000000000000000

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, dapat disimpulkan bahwa metode beda hingga dapat menyelesaikan persamaan sistem pegas massa. Hasil perhitungan secara analitik menunjukkan bahwa panjang regangan maksimum pegas adalah 2.328642 dan pegas akan berhenti berosilasi ketika $t = 120$. Sedangkan hasil perhitungan secara numerik menunjukkan bahwa panjang regangan maksimum pegas adalah 0.55937 dan pegas akan berhenti berosilasi ketika i berada disekitar $i = 6$. *Error* antara penyelesaian analitik dengan penyelesaian numerik sangat kecil.

5. Daftar Pustaka

- [1] Haberman R., 1998. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. SIAM, Philadelphia.
- [2] Gabariela Purnama N., Sudi, M., 2019. Penerapan Metode Runge-Kutta dan Iterasi Variasional dalam Simulasi Transmisi Tuberkulosis. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, Vol. 16, No. 2, hal. 147-157.
- [3] Haines, C., & Crouch, R., 2007. Mathematical Modelling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, (pp. 417-424). New York: Springer.
- [4] Triatmodjo B., 2002. *Metode Numerik*. Beta Offset, Yogyakarta.
- [5] Hasan, dkk., 2016. Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant. *Zeta – Math Journal*, Vol. 2, No. 1, hal. 6-12.
- [6] Bambang, A. S., 2015. Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas. *Journal Math Educator Nusantara*, Vol. 1, No. 1, hal. 41-46.
- [7] Nursyamsu, T., 2013. *Penentuan Harga Opsi untuk Model Black Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga*. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Alauddin Makasar.
- [8] Forsyth, G., & Wasow, W., 1960. *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley.

- [9] Devaney, R., 2011. *Mastering Differential Equations: The Visual Method*. THE GREAT COURSES, Virginia.
- [10] Wuryansari Muharini K., 2015. *Bahan Ajar Pemodelan Matematika*. Program Studi Matematika, Universitas Brawijaya
- [11] Langtangen, H., & Linge, S., 2016. Finite Difference Computing with PDEs- A Modern Software Approach. *Released under CC Attribution 4.0 license*.
- [12] Duffy, D., 2006. Finite Difference Methods in Financial Engineering, A Partial Differential Equation Approach. *Published by John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, England*.