J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 16, No. 2, 199-207, Januari 2020
DOI: 10.20956/jmsk.v%vi%i.8062

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus

Ahmad Syukur Daming[1*], **Hasmawati Hasmawati**[2*], **Loeky Haryanto**[3*]
Budi Nurwahyu[4*]

Abstract

Let be a connected graph G and k-partition $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ of V(G) end $v \in V(G)$. The coordinat v to Π is definition $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. If $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ for every two vertices in V(G), then Π is a called k-resolving partition of $V(G)$. The minimum k such that Π is a k-resolving partition of $V(G)$ is the partition dimension of G and denoted by pd(G). In this paper, we show that the partition dimension for amlagamation of cycle graph $pd(Amal(C_n)_m) = 3$ for $m = 2,3$ and $n \geq 3$. To proof this results, we was used mathematical induction method.

Keywords: Partition Dimention, Amalgamation, Cycle Graph

Abstrak

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Jika $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$, maka Π disebut k-partisi pembeda dari $V(G)$. Nilai minimum k sehingga Π merupakan k-partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi dari G yang dinotasikan dengan $pd(G)$. Dalam makalah ini ditunjukkan bahwa dimensi partisi dari amalgamasi graf siklus, $pd(Amal(C_n)_m) = 3$ untuk $m = 2,3$ dan $n \geq 3$. Metode yang digunakan dalam mengbuktikan hasil tersebut adalah induksi matematika.

Kata kunci: Dimensi Partisi, Amalgamasi, Graf Siklus.

1. Pendahuluan

Graf adalah pasangan himpunan terurut (V, E), dan ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan–pasangan tidak terurut dari anggota V yang disebut sisi. Salah satu kajian dalam teori graf yang mendapat perhatian dari beberapa peneliti adalah dimensi partisi (*partition dimension*). Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk [4]. Mereka mengelompokkan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut.

Terdapat beberapa hasil tentang dimensi partisi suatu graf yang telah diperoleh diantaranya dalam [5] dituliskan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan P_n dan menunjukkan bahwa graf G mempunyai $pd(G) = n$ jika dan hanya jika

**Program Studi Pascasarjana (S2) Matematika, FMIPA-UNHAS*
***Email** : [1]ahmadsyukurd@gmail.com, [2]hasmaba97@gmail.com,*
[3]l.haryanto@unhas.ac.id, [4]budinurwahyu@unhas.ac.id

G adalah graf lengkap K_n. Dalam makalah [9], disajikan batas atas dan bawah dimensi partisi untuk graf pohon. Sedangkan makalah [1], menyajikan dimensi partisi graf amalgamasi bintang. Dimensi partisi graf amalgamasi bintang dan lintasan disajikan dalam makalah [2], sedangkan makalah [6], membahas dimensi partisi untuk graf persahabatan. Dalam makalah ini dibahas penentuan dimensi partisi untuk graf amalgamasi siklus. Beberapa metode yang disajikan pada makalah [2] dan [5] akan dikembangkan untuk digunakan dalam penentuan dimensi partisi graf Amalgamasi siklus. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini, ditulis dalam bentuk lema dan proposisi, dan di akhir buktinya diberi tanda ■.

2. Tinjauan Pustaka

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan titik yang disebut sisi. Misalkan sisi $e = \{u, v\} \in E(G)$, maka dikatakan bahwa sisi e terkait dengan titik u dan titik v, sedangka titik u dan titik v disebut titik-titik yang bertetangga. Untuk kepentingan penghematan dalam penulisan selanjutnya, sisi $e = \{u, v\} \in E(G)$ hanya ditulis uv. Graf G disebut graf terhubung (connected), jika untuk setiap dua titik yang berbeda u dan v di G terdapat suatu lintasan dari u ke v [3]. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang ada pada lintasan tersebut.

Misalkan G adalah graf sederhana dan $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah

$$d(u,v) = \begin{cases} k, & dengan\ k\ adalah\ panjang\ lintasan\ terpendek\ antara\ u\ dan\ v \\ 0, & u = v \\ \infty, & jika\ tidak\ ada\ kaitan\ antara\ u\ dan\ v. \end{cases}$$

Dalam maalah [8] disebutkan bahwa graf lintasan $P = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$, dengan setiap $v_i \neq v_j$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Graf lintasan yang berorder n dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 1$. Jika $P_n := v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah suatu graf lintasan berorde n dan $n \geq 3$, maka graf siklus C_n adalah graf dengan himpunan titik $\mathrm{V}(C_n) = \mathrm{V}(P_n)$ dan himpunan sisi $\mathrm{E}(C_n) = \mathrm{E}(P_n) \cup \{v_1v_n\}$. Graf siklus C_n memiliki n titik dan n sisi dengan setiap titiknya berderajat dua.

Misalkan $\{G_i | i \in \{1,2,3, \ldots, m\}\}$ untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$, merupakan kumpulan graf berhingga dan masing–masing G_i memiliki titik tetap v_{0i} yang disebut terminal. Amalgamasi $Amal(G_i, v_{0i})$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua G_i dan menyatukan terminalnya [9]. Graf yang akan di diteliti dalam penelitian ini adalah $Amal(C_{n_i})$ dengan $n_i = n_j > 3$ untuk setiap i, j dan $1 \leq i, \mathrm{j} \leq m, m \in N$. Untuk penyederhanaan penulisan dalam penelitian ini $Amal(C_{n_i})$ dinotasikan dengan $Amal(C_n)_m$. Himpunan titik $V(Amal(C_n)_m) = \{c, x_{i,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpuan sisi $E(Amal(C_n)_m) = \{cx_{1,j}, cx_{n-1,j} \,|1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$.

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, $S \subseteq V(G)$ dan $v \in V(G)$, jarak antara v dengan S yang dinotasikan $d(v, S)$, didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan koleksi himpunan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, dengan S_j adalah partisi dari $V(G)$. Himpunan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ disebut **himpunan partisi** dan S_j disebut **kelas partisi.** Misalkan $v \in V(G)$. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = \big(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\big)$.

Himpunan partisi Π dikatakan k-**partisi pembeda** (*resolving partition*) jika k-vektor $r(v|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$, berbeda. Nilai minimum k agar terdapat k-partisi pembeda dari $V(G)$ adalah **dimensi partisi** dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ [5]. Dalam [6], ditunjukkan bahwa $pd(Amal(C_n)_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } m = 2,3; \\ 4, & \text{jika } m = 4,4,6. \end{cases}$

Dalam penentuan dimensi partisi untuk graf $Amal(C_n)_m$ diperlukan beberapa sifat seperti yang disajikan pada definisi, lema, dan proposisi berikut.

Definisi 2.1. Diberikan suatu graf terhubung G dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut:

a. $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) /\{u,v\}$,

b. Untuk setiap $s \in V(G) /\{u,v\}$, terdapat titik c sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$.

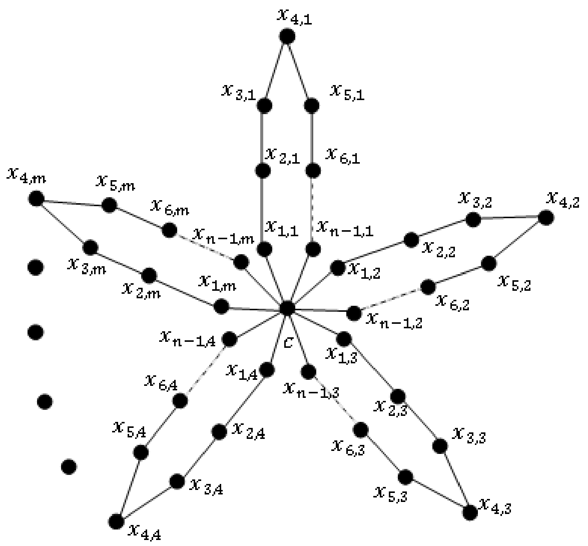
Lema 2.1. Diberikan suatu graf terhubung G dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$, untuk $u, v \in V(G)$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) /\{u,v\}$, maka u dan v merupakan unsur yang berada pada kelas partisi yang berbeda di Π.

Lema 2.2. Diberikan suatu graf terhubung G dan $u, v \in V(G)$ merupakan titik-titik yang setara. Misalkan pula $r \in N(u)$, $s \in N(v)$ dan $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ merupakan partisi pembeda dari G. Jika $u, v \in S_i$, maka r dan s merupakan unsur yang berada pada kelas partisi yang berbeda di Π.

Bukti.

Misalkan $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$, $u, v \in S_i$. Karena u dan v adalah titik-titk yang setara, maka $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) /\{u,v\}$ atau untuk setiap $s \in V(G) /\{u,v\}$, terdapat titik c sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$. Mengingat $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ adalah partisi pembeda, $d(u,r) = d\ (v,s)=1$ dan $d(u,S_i) = d\ (v,S_i)$ dengan $S_i/\{s,r\}$, untuk $r \in N(u)$ dan $s \in N(v)$, maka mestilah terdapat $k, j \in \{1,2,\dots,k\}$ sehingga $s \in S_k$ dan $r \in S_j$. Dalam hal ini, $d(u,S_k) = 1 \neq d(v,S_k)$ dan $d(v,S_j) = 1 \neq d(u,S_j)$. ∎

Teorema 2.1. Diberikan G graf terhubung dengan order $n \geq 2$, maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$.



Gambar 1. Graf Hasil Amalgamasi Siklus ($Amal(C_n)_m$)

2.1 Dimensi Partisi $\boldsymbol{Amal(C_n)_2, n \geq 4}$.

Batas atas dimensi partisi $Amal(C_n)_2$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $Amal(C_n)_2$.

a. Misalkan n=4 dengan himpunan titik $V(Amal(C_4)_2)$ dan himpunan sisi $E(Amal(C_4)_2)$. Tulis $V(Amal(C_4)_2) = \{c\} \cup \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}\} \cup \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$, dengan $V((C_4)_1) = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}\}$ dan $V((C_4)_2) = \{c, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$ dan $E(Amal(C_4)_2)$= $\{c\,x_{1,1},\ x_{1,1}x_{2,1}, x_{2,1}x_{3,1}, x_{3,1}c\} \cup \{cx_{1,2}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{2,2}x_{3,2}, x_{3,2}c\}$. Pilih himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}\}$, $S_2 = \{x_{3,1}, x_{2,2}\}$, dan $S_3 = \{x_{3,2}\}$. Representasi setiap titik di $Amal(C_4)_2$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$r(c|\Pi) = (0,1,1)$
$r(x_{1,1}|\Pi) = (0,2,2) = (0,1+1,1+1)$, jika $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$;
$r(x_{2,1}|\Pi) = (0,1,3) = (0,4-2-1,2+1), 2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$;
($r(x_{i,1}|\Pi) = (0, n-i-1, i+1)$; jika $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$)

$r(x_{1,2}|\Pi) = (0,1,2)$
$r(x_{3,1}|\Pi) = (1,0,2)$
$r(x_{2,2}|\Pi) = (1,0,1)$
$r(x_{3,2}|\Pi) = (1,1,0)$= ($r(x_{n-1,2}|\Pi) = (1,1,0)$)

Hasil observasi menunjukkan semua titik $Amal(C_4)_2$ mempunyai representasi yang berbeda, sehingga Π merupakan partisi pembeda dari $Amal(C_4)_2$ dengan kardinalitas $|\Pi| = 3$. Jadi, $pd(Amal(C_4)_2) \leq 3$. ...(3.1)

Untuk batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_4)_2$ dapat merujuk pada Proposisi 2.1 menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$. Graf $Amal(C_n)_2 \ncong P_n$, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $Amal(C_n)_2$ adalah $pd(Amal(C_n)_2) \geq 3$. ...(3.2)

Berdasarkan persamaan (3.1), dan (3.2) diperoleh batas bawah dan atas yaitu $3 \leq pd(Amal(C_n)_2) \leq 3$. Jadi dimensi partisi graf $Amal(C_4)_2$ adalah $pd(Amal(C_4)_2) = 3$.

b. Misalkan $n = 5$ dengan himpunan titik $V(Amal(C_5)_2)$ dan himpunan sisi $E(Amal(C_5)_2)$. Tulis $V(Amal(C_5)_2) = \{c\} \cup \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{l,1}, x_{3,1}\} \cup \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{l,2}, x_{3,2}\}$, dengan $V((C_5)_1) = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{l,1}, x_{3,1}\}$ dan $V((C_5)_2) = \{c, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{l,2}, x_{3,2}\}$ dan $E(Amal(C_5)_2) = \left\{\begin{matrix} \{c\,x_{1,1},\ x_{1,1}x_{2,1}, x_{2,1}x_{l,1}, x_{l,1}x_{3,1}, x_{3,1}c\} \cup \\ \{cx_{1,2}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{2,2}x_{l,2}, x_{l,2}x_{3,2}, x_{3,2}c\} \end{matrix}\right\}$.

Pilih himpunan partisi $\Pi = \{S_1', S_2', S_3'\}$ dengan $S_1' = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{l,1}, x_{1,2}\} = S_1 \cup \{x_{l,1}\}$, $S_2' = \{x_{3,1}, x_{2,2}, x_{l,2}\} = S_2 \cup \{x_{l,2}\}$, dan $S_3' = \{x_{3,2}\} = S_3$. Refresentasi setiap titik di $Amal(C_5)_2$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$r(c|\Pi) = (0,1,1)$

$r(x_{i,1}|\Pi) = (0,2,2) = (0, i+1, i+1)$; jika $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor - 1$

$r(x_{i,1}|\Pi) = (0,2,3) = (0, n-i-1, i+1)$; jika $i = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$

$r(x_{i,1}|\Pi) = (0,1,3) = (0, n-i-1, n-i+1)$; jika $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq 5-2$ untuk $n \geq 5$

$r(x_{n-1,1}|\Pi) = (1,0,2)$

$r(x_{1,2}|\Pi) = (0,1,2)$

$r(x_{i,2}|\Pi) = (1,0,2) = (i-1, 0, n-i-1)$; jika $i = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$

$r(x_{i,2}|\Pi) = (2,0,1) = (n-i-1, 0, n-i+1)$; jika $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq 5-2$ dan $n \geq 5$

$r(x_{n-1,2}|\Pi) = (1,1,0)$.

Hasil observasi menunjukkan bahwa semua titik $Amal(C_5)_2$ mempunyai representasi yang berbeda, sehingga Π merupakan partisi pembeda dari $Amal(C_5)_2$ dengan kardinalitas $|\Pi| = 3$. Jadi, $pd(Amal(C_n)_2) \leq 3$. ...(3.3)

Untuk batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_5)_3$ dapat merujuk pada Proposisi 2.1 menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$. Graf $Amal(C_n)_2 \ncong P_n$, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $Amal(C_5)_2$ adalah $pd(Amal(C_5)_2) \geq 3$. ...(3.4)

Berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh batas bawah dan atas yaitu $3 \leq pd(Amal(C_n)_2) = 3$. Jadi dimensi partisi graf $Amal(C_n)_3$ adalah $pd(Amal(C_5)_2) = 3$. ■

2.2. Dimensi partisi $Amal(C_n)_3$

Penentuan dimensi partisi $Amal(C_n)_3$ dimulai dengan $n = 4$.

a. Misalkan $V(Amal(C_4)_3) = \{c\} \cup \{ x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}\} \cup \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$ $\cup \{x_{1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}\}$ dengan $V((C_4)_1) = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}\}$, $V((C_4)_2) = \{c, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$, $V((C_4)_3) = \{c, x_{1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}\}$ dan

$E(Amal(C_4)_3) = \{c\, x_{1,j},\ x_{i,j}x_{i+1,j}, x_{3,j}c\}, i = 1,2;\ j = 1,2,3;$

Pilih himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}$, $S_2 = \{x_{3,1}, x_{2,2}\}$, dan $S_3 = \{ x_{3,2}, x_{2,3}x_{3,3}\}$. Representasi setiap titik di $Amal(C_4)_3$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$r(c|\Pi) = (0,1,1)$
$r(x_{1,1}|\Pi) = (0,2,2);$
$r(x_{2,1}|\Pi) = (0,1,3);$

$r(x_{1,2}|\Pi) = (0,1,2);$
$r(x_{3,1}|\Pi) = (1,0,2);$
$r(x_{2,2}|\Pi) = (1,0,1);$
$r(x_{3,2}|\Pi) = (1,1,0);$

$r(x_{1,3}|\Pi) = (0,2,1);$
$r(x_{2,3}|\Pi) = (1,3,0)$;
$r(x_{3,3}|\Pi) = (1,2,0).$

Hasil observasi menunjukkan semua titik $Amal(C_4)_3$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, sehingga Π merupakan partisi pembeda dari $Amal(C_4)_3$ dengan kardinalitas $|\Pi| = 3$. Jadi, $pd(Amal(C_4)_3) \leq 3$. Menurut Proposisi 2.1, $pd(Amal(C_4)_3) \geq 3$. Jadi $pd(Amal(C_4)_3) = 3$.

b. Misalkan $V(Amal(C_5)_3) = \{c\} \cup \{ x_{1,1}, x_{2,1}, x_{l,1}, x_{3,1}\} \cup \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{l,2}, x_{3,2}\}$ $\cup \{x_{1,3}, x_{2,3}, x_{l,3}, x_{3,3}\}$ dengan $V((C_5)_1) = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{l,1}, x_{3,1}\}$, $V((C_5)_2) = \{c, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{l,2}, x_{3,2}\}$, $V((C_5)_3) = \{c, x_{1,3}, x_{2,3}, x_{l,3}, x_{3,3}\}$ dan

$$E(Amal(C_5)_3) = \begin{array}{l} \{c\, x_{1,1},\ x_{1,1}x_{2,1}, x_{2,1}x_{l,1}, x_{l,1}x_{3,1}, x_{3,1}c\} \cup \\ \{cx_{1,2}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{2,2}x_{l,2}, x_{l,2}x_{3,2}, x_{3,2}c\} \cup \\ \{cx_{1,3}, x_{1,3}x_{2,3}, x_{2,3}x_{l,3}, x_{l,3}x_{3,3}, x_{3,3}c\} \end{array}$$

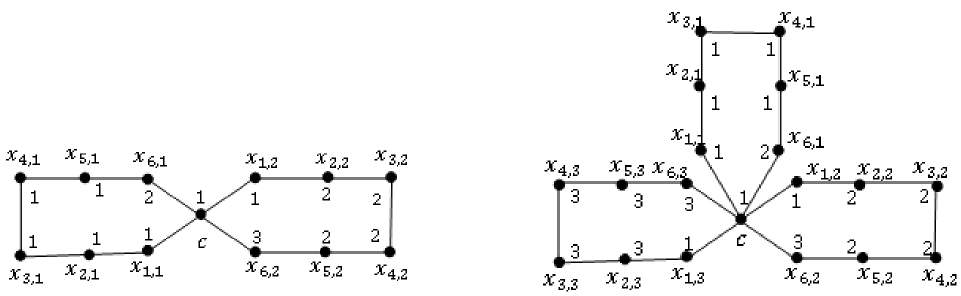
Pilih himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{c, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{l,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}$, $S_2 = \{x_{3,1}x_{2,2}, x_{l,2}, x_{3,3}\}$, dan $S_3 = \{ x_{3,2}, x_{2,3}x_{l,3}\}$. Refresentasi setiap titik di $Amal(C_5)_3$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

Untuk representasi titik c dan $x_{i,j}$ dimana $1 \leq i \leq 3$ dan $1 \leq j \leq 2$ sama dengan representasi titik pada graf $Amal(C_4)_2$, sedangkan titik $x_{l,j}$ dan titik $x_{i,3}$ untuk i, j, $1 \leq i \leq 3$ dan $1 \leq j \leq m$ adalah

$r(x_{l,1}|\Pi) = (0,1,3) = r(x_{(n-2),1}|\Pi((C_n)_2))$;
$r(x_{l,2}|\Pi) = r(x_{(n-2),1}|\Pi((C_n)_2)) = (2,0,1)$
$r(x_{1,3}|\Pi) = (0,2,1)$
$r(x_{i,3}|\Pi) = (1,2,0) = (i-1, n-i, 0)$; jika $i = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor$
$r(x_{l,3}|\Pi) = (2,1,0) = (n-i, n-i+1, 0)$; jika $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq 3$
$r(x_{n-1,3}|\Pi) = (1,2,0)$.

Hasil observasi menunjukkan semua titik $Amal(C_5)_3$ mempunyai representasi yang berbeda, sehingga Π merupakan partisi pembeda dari $Amal(C_5)_3$ dengan kardinalitas $|\Pi| = 3$. Jadi, $pd(Amal(C_5)_3) \leq 3$. Serupa dengan batas bawah $Amal(C_4)_3$ bahwa menurut Proposisi 2.1, diperoleh $pd(Amal(C_5)_3) \geq 3$. Jadi $pd(Amal(5)_3) = 3$. ∎

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $pd(Amal(C_n)_2)$ dan $pd(Amal(C_n)_3)$ adalah 3 untuk $n = 6$ dan $n = 7$. Graf $Amal(C_7)_2$ dan $Amal(C_7)_3$ dapat dilihat pada Gambar 2.



(a) (b)

Gambar 2. Partisi Pembeda (a) $Amal(C_7)_2$ dan (b) $Amal(C_7)_3$

Berdasarkan hasil pada Subbab **2.1** dan **2.2**, dirumuskan perumuman partisi dimensi graf $Amal(C_n)_m$ untuk $2 \leq m \leq 3$ dalam bentuk teorema seperti berikut.

Proposisi 2.2: Jika $n \geq 4$ dan $2 \leq m \leq 3$, maka $pd(Amal(C_n)_m) = 3$.
Bukti:

Pembuktian Proposisi 2.2 menggunakan metode induksi matematika, yaitu:

1) Berdasarkan hasil pada Subbab 2.1 dan 2.2 diperoleh :
   a. Untuk $n = 4$ dan $m = 2,3$, $pd(Amal(C_n)_m) = 3$
   b. Untuk $n = 5$ dan $m = 2,3$, $pd(Amal(C_n)_m) = 3$
   c. Untuk $n = 6$ dan $m = 2,3$, $pd(Amal(C_n)_m) = 3$
   d. Untuk $n = 7$ dan $m = 2,3$, $pd(Amal(C_n)_m) = 3$

2) Asumsikan bahwa untuk $2 \leq m \leq 3$, $pd(Amal(C_n)_m) = 3$ adalah benar jika $n = l \geq 4$, yaitu $pd(Amal(C_l)_m) = 3$ dengan partisi pembeda minimum adalah $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$,
$S_1 = \{c, x_{i,1}, x_{1,2}, x_{1,m} | 1 \leq i \leq n-2\}$, $S_2 = \{x_{n-1,1}, x_{i,2}, x_{n-1,m} | 2 \leq i \leq n-2\}$, dan $S_3 = \{x_{n-1,2}, x_{i,m} | 2 \leq i \leq n-2\}$. Dalam hal ini,
$V(Amal(C_l)_m) = \{c\} \cup \{ x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,m}\} \cup \dots \cup \{x_{l,1}, \dots, x_{l,m}\}$ dan
$E(Amal(C_l)_3) = \{c\, x_{1,j},\ x_{1,j}x_{2,j}, x_{2,j}x_{3,j}, \dots, x_{l-1,1}x_{l,1}, x_{l,j}c; j = 1,2,\dots,m\}$.

3) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa proposisi juga benar untuk $n = l+1$, yaitu jika $2 \leq m \leq 3$ maka $pd(Amal(C_{l+1})_m) = 3$.
Graf $Amal(C_{l+1})_m$ merupakan graf dengan penambahan satu titik sebut $x_{0,j}$ pada sisi $e = x_{n-2,j}x_{n-1,j}$ $\forall\, j \in [1, m]$ di graf $Amal(C_n)_m$.
Untuk menentukan dimensi partisi $pd(Amal(C_{l+1})_m))$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda graf $Amal(C_{l+1})_m$. Misalkan $\Pi' = \{S_1', S_2', S_3'\}$ sedemikian sehingga :

a. Untuk $m = 2$,
$S_1' = \{c, x_{i,1}, x_{1,2} | 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{x_{0,1}\} = S_1 \cup \{x_{0,1}\}$,
$S_2' = \{x_{n-1,1}, x_{i,2} | 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{x_{0,2}\} = S_2 \cup \{x_{0,2}\}$, dan
$S_3' = \{x_{n-1,2}\} = S_3$
Representasi setiap titik di $Amal(C_{l+1})_2$ terhadap Π' adalah sebagai berikut:
$r(c|\Pi') = (0,1,1)$
$r(x_{i,1}|\Pi') = (0, i+1, i+1)$; jika $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
$r(x_{i,1}|\Pi') = (0, n-i, n-i+2)$; jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n-2$ untuk $n \geq 5$,
karena $x_{n-2,j} \leq x_{0,j} \leq x_{n-1,j}$.
$r(x_{1,2}|\Pi') = (0,1,2)$
$r(x_{0,1}|\Pi') = (0,1,3)$

$r(x_{n-1,1}|\Pi') = (1,0,2)$
$r(x_{i,2}|\Pi') = (i-1, 0, i+1)$; jika $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
$r(x_{i,2}|\Pi') = (n-i+1, 0, n-i)$; jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n-2$ dan $n \geq 5$
$r(x_{0,2}|\Pi') \quad = (2,0,1)$

$r(x_{n-1,2}|\Pi') = (1,1,0)$

b. Untuk $m = 3$, tulis $\Pi'' = \{S_1'', S_2'', S_3''\}$, $S_1'' = S_1 \cup \{x_{0,1}\}$, $S_2'' = S_2 \cup \{x_{n-1,m}, x_{0,2}\}$, dan $S_3'' = \{x_{n-1,2}, x_{i,3} | 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{x_{0,3}\} = S_3 \cup \{x_{i,3} | 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{x_{0,3}\}$

untuk setiap $n \in N$. Karenanya, representasi titik c dan $x_{i,j}$ dimana $1 \leq i \leq n-1$ dan $1 \leq j \leq 2$ sama dengan representasi titik pada graf $Amal(C_n)_2$ $n \in N$.
Sedangkan titik $x_{i,3}$ dimana $1 \leq i \leq n-1$ dan titik $x_{l,3}$ adalah sebagai berikut:
$r(x_{1,3}|\Pi'') = (0,2,1)$

$r(x_{i,3}|\Pi'') = (i-1, i+1, 0)$; jika $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
$r(x_{i,3}|\Pi'') = (i-1, n-i+2, 0)$; jika $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$
$r(x_{i,3}|\Pi'') = (n-i+1, n-i+2, 0)$; jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \leq i \leq n-2$ dan $n \geq 5$
$r(x_{0,3}|\Pi'') = (2,3,0)$
$r(x_{n-1,3}|\Pi'') = (1,2,0)$
Terlihat bahwa representasi setiap titik graf $Amal(C_{n+1})_m$, untuk $m = 2,3$ terhadap himpunan partisi Π'' adalah berbeda. Dengan demikian himpunan partisi Π'' merupakan partisi pembeda untuk graf $Amal(C_{n+1})_m$, dengan $m = 2,3$. Jadi $|\Pi''| = |\Pi| = 3$ $pd(Amal(C_n)_m) \leq 3$, jika $2 \leq m \leq 3$. Menurut Proposisi 2.1, $pd(Amal(C_n)_m) \geq 3$. Jadi $pd(Amal(C_n)_m) = 3$ untuk setiap $n \in N, n \geq 4$ dan $2 \leq m \leq 3$. ■

Daftar Pustaka

[1] Asmiati. 2012. Partition Dimension of Amalgamation of Stars. *Bulletin of Mathematics*. 02(04): 161-167.
[2] Asmiati. 2016. Dimensi Partisi Graf Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan Suatu Lintasan. *Jurnal Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung*. 19(3): 93-95.
[3] Chartrand, G., dan Oellermann, O. R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw–Hill, Inc, New York–St. Louis–San Francisco.
[4] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zang, P. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congressus Numerantium*. Vol. 130: 157-168.
[5] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zang, P. 2000. The Partition Dimension of Graph. *Aequationes Mathematicae*. 59: 45-54.
[6] Darmaji. 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung. Disertasi*. Bandung: Institut Teknologi Bandung, Indonesia.
[7] Diestel R. 2005. *Graph Theory*, Third Edition. Springer-Verlag Heidelberg. New York.
[8] Fitriani, D., Salman, A. N. M. 2016. Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International journal of graphs and combinatorics*. 13 : 90–99.
[9] Juan, R., Yero, I. G., dan Lemanska, M. 2014. On the Partition Dimension of Trees. *Discrete Applied Mathematics*. 166: 204-209.