ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 12, No. 1, 71-82, Juli 2015

Getaran Selaput Melingkar pada Persamaan Gelombang Dua Dimensi dalam Koordinat Polar

M.Saleh AF, Nurul Muslihat[1]

Abstrak

A first, we used our knowledge of Fourier series to solve several interesting boundary value problems by the method of separation of variables. The success of our method depended to a large extent on the fact that the domains under consideration were easily described in Cartesian coordinates. In this paper/research we address problems where the domains are easly described in polar and cylindrical coordinates. Spesifically we consider boundary value problems for the wave, heat, Laplace and Poisson equation over disks or cylinders. Upon restating these problems in suitable coordinat systems and separating variables, we will encounter new ordinary differential equations, Bessel's equation, whose solutions are called Bessel function in ways analogous to Fourier series expansions. The vibrations of the membrane are governed by the two-dimensional wave equation, which will be expressed in polar coordinantes, because these are the coordinates best suited to this problem. Finally, we will solve the two dimensional wave equation in polar coordinates (general case).

Kata Kunci: Wave equation, Bessel-Fourier, superposition-principle, vibration membrane, circular.

1. Pendahuluan

Dalam pembahasan ini banyak melibatkan rumus-rumus atau sifat-sifat matematika, serta manipulasi aljabar, sehingga perlu ketekunan dan referensi yang memadai. Beberapa teorema atau sifat–sifat yang secara implisit akan digunakan dalam pembahasan ini.

Teorema 1. (Persamaan parametrik Bessel)

Persamaan parametrik Bessel orde p $(p \geq 0)$, *dinyatakan sebagai*

$$x^2 y(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - p^2)y(x) = 0$$

dengan solusi $J_p\left(\frac{\alpha_{pj}}{a}\, x\right)$, $a > 0$, $\lambda = \lambda_{pj} = \frac{\alpha_{pj}}{a}, j = 1,2,\cdots$.

Teorema 2. (Otogonalitas dari Fungsi Bessel)

Untuk $p \geq 0$ *dan* $a > 0$, *maka berlaku*

(a) $\int_0^a J_p(\lambda_{pj}x) J_p(\lambda_{pk}x)x\, dx = 0$, *untuk* $j \neq k$,

(b) $\int_0^a J_p^2(\lambda_{pj}x)x\, dx = \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha_{pj})$, $\lambda_{pj} = \frac{\alpha_{pj}}{a}, j = 1,2,\cdots$.

Koefisien Fourier dapat dihitung melalui formula Euler berikut. Misal deret Fourier berbentuk

[1] *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Untuk mendapatkan koefisien a_0, dilakukan dengan mengintegralkan kedua ruas pada $f(x)$, kemudian diselesaikan. Untuk mendapatkan koefisien a_n dan b_n, dilakukan dengan mengalikan kedua ruas pada $f(x)$ dengan $\cos m\theta$, $m \geq 1$, kemudian di integralkan

Deret Bessel orde p dinyatakan sebagai $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_p(\lambda_{pj} x)$, dengan $f \epsilon [0, a]$. Untuk mendapatkan koefisien A_j, dilakukan dengan mengalikan kedua ruas pada f dengan $J_p\left(\lambda_{pk} x\right)x$, kemudian diintegralkan.

Definisi 1. (Fungsi Periodik)

Jika f fungsi periodik dengan priode $T = 2p > 0$ *dan misalkan* $g(x) = f\left(\frac{p}{\pi}x\right)$, *maka* $g(x + 2\pi) = f\left(\frac{p}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x + 2p\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x\right) = g(x)$.

Laplacian dalam bentuk polar dinyatakan sebagai:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

2. Pembahasan

Dengan menggunakan polar Laplacian, persamaan gelombang dua dimensi dinyatakan sebagai

$$c^2 \nabla^2 u \iff \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan tersebut dalam koordinat polar yang memenuhi syarat awal dan syarat batas sebagai berikut

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)} \qquad (1)$$

dengan $0 < r < a$, $0 < \theta < 2\pi$, $t > 0$.

Syarat awal (*displacement* and *velocity*) masing-masing adalah

$$\boxed{u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \ \& \ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = g(r, \theta)}, 0 < r < a\,,\ 0 < \theta < 2\pi \qquad (2)$$

Syarat batas

$$\boxed{u(a, \theta, t) = 0}\,, 0 < \theta < 2\pi\,,\ t > 0 \qquad (3)$$

Karena θ sudut polar dengan periode 2π, maka $u(r, \theta, t) = u(r, \theta + 2\pi, t)$, akibatnya,

$$u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t) \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 2\pi, t) \qquad (4)$$

Pertama-tama, menyelesaikan problem (1) dengan syarat batas (3), sebagai berikut.

Langkah 1. Menggunakan peubah terpisah (*separation of variables*)

Pandang produk solusi dari (1) berbentuk

$$u(r, \theta, t) = R(r)\, \Theta(\theta)\, T(t) \qquad (5)$$

Differensialkan u secara parsial dua kali terhadap masing-masing variabelnya, diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R\Theta\ddot{T};\ \frac{\partial u}{\partial r} = \Theta T R'\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''\Theta T \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = R\Theta'' T \qquad (6)$$

tanda dot (•) , menyatakan turunan terhadap waktu, tanda prim (') menyatakan turunan pertama terhadap r dan θ. Selanjutnya, subtitusi (6) ke (1), diperoleh

$$R\Theta\ddot{T} = c^2\left(\Theta T R'' + \frac{1}{r}\Theta T R' + \frac{1}{r^2} R T \Theta''\right).$$

Kedua ruas di bagi $c^2 R\Theta T$, diperoleh persamaan

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} \qquad (7)$$

Ruas kiri hanya tergantung pada variabel t, dan ruas kanan hanya tergantung pada variabel r dan θ, sehingga masing-masing ruas sama dengan sebuah <u>konstanta</u>, dan konstanta ini haruslah negatif, katakanlah $k = -\lambda^2$, sehingga diperoleh persamaan-persamaan

(i) $\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = -\lambda^2$, (ii) $\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\lambda^2$

Kalikan faktor r^2 pada persamaan (ii) , diperoleh ,

(iii) $\frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2 r^2 \iff \frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \lambda^2 r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta}$

Sekali lagi dengan menerapkan metode pemisahan peubah pada persamaan (iii), diperoleh

(iii.a) $\frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \lambda^2 r^2 = \mu^2$ (iii.b) $-\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2$

Disini dipilih non-negatif untuk tanda konstanta μ^2, karena solusi persamaan dalam Θ memiliki perioda 2π.

Berdasarkan syarat batas (3), maka

$$R(a)\Theta(\theta)T(t) = 0, \qquad 0 < \theta < 2\pi \ \ dan\ t > 0$$

Untuk menghindari solusi trivial, maka diberi syarat $R(a) = 0$. Dengan cara yang serupa, gunakan (4), diperoleh $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ dan $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$. Sehingga diperoleh persamaan peubah terpisah (*sparated equation*)

(a) $\Theta'' + \mu^2\Theta = 0,\ \Theta(0) = \Theta(2\pi)\ ,\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$

(b) $r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0,\ R(a) = 0$ (8)

(c) $\ddot{T} + c^2\lambda^2 T = 0,\ T(0) = 0$

<u>Langkah 2</u>. Menyelesaikan persamaan peubah terpisah (8)

Untuk Θ, jika $\mu = 0$, persamaan 8(a) menjadi $\Theta'' = 0$, dan solusinya adalah sebuah konstantaA_0. Jika $\mu \neq 0$, maka persamaan $\Theta'' + \mu^2\Theta = 0$, mempunyai persamaan karakteristik $\gamma^2 + \mu^2 = 0$, dengan akar-akar karakteristik $\gamma_{1,2} = \pm i\mu$ (*komplex conjugate*), sehingga solusi dari (8a) adalah

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos\mu\theta + c_2 \sin\mu\theta.$$

Agar memenuhi syarat batas, maka ditetapkan μ berupa integer sehingga solusi umum untuk Θ adalah

$$\boxed{\Theta_m = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta\ ,\ m = 0,1,2,\cdots} \qquad (9)$$

Catatan: Untuk m negatif, tidak memberi konstribusi solusi yang baru.

Untuk R, setting $\mu = m$ diperoleh

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - m^2)R = 0\ , R(a) = 0$$

(i.e: syarat batas: R terbatas dan $R(a) = 0$) yang merupakan bentuk <u>persamaan parametrik Bessel orde m</u>. Solusi untuk R adalah

$$\boxed{R(r) = R_{mn}(r) = J_m(\lambda_{mn}r),\ m = 0,1,2,\cdots, n = 1,2,\cdots} \qquad (10)$$

dengan $R(a) = 0 \Leftrightarrow R(a) = R_{mn}(a) = J_m(\lambda_{mn}a) = 0$ dan a_{mn} is the n*th* positif zero dari fungsi Bessel J_m.

Untuk T, ambil $\lambda = \lambda_{mn}$, persamaan 8(c) menjadi $\ddot{T} + c^2\lambda_{mn}^2\, T = 0$, dengan solusi adalah

$$\boxed{T(t) = A_{mn}\cos(c\lambda_{mn}t) + B_{mn}\sin(c\lambda_{mn}t)}, \lambda = \lambda_{mn} \qquad (11)$$

Perhatikan bahwa jika $T(0) = 0 \Longrightarrow A_{mn} = 0, \forall m, n$. Dengan menggunakan ekspresi R, Θ dan T, diperoleh produk solusi (1) yang memenuhi (3), adalah

$$\boxed{u_{mn}(r,\theta,t) = J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\cos c\lambda_{mn}t} \qquad (12)$$

dan

$$\boxed{u_{mn}^*(r,\theta,t) = J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}^*\cos m\theta + b_{mn}^*\sin m\theta)\sin c\lambda_{mn}t} \qquad (13)$$

dengan $m = 0,1,2,\cdots\ , n = 1,2,\cdots$.

Catatan: Koefisien-koefisien A_{mn} dan B_{mn} dengan a_{mn} dan b_{mn} atau a_{mn}^* dan b_{mn}^* dapat diganti.

Melihat solusi ini cukup kompleks, maka problem ini dapat dipandang dalam dua kasus terpisah.

<u>**Kasus I:**</u> Getaran selaput dengan syarat awal untuk *zero initial velocity*: $g(r,\theta) = 0$.

Syarat awal dalam kasus ini adalah

$$u(r,\theta,0) = f(r,\theta),$$
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta) = 0}, \qquad (14)$$

untuk setiap $0 < r < a\ ,\ 0 < \theta < 2\pi$. Kiranya mudah terlihat bahwa hanya produk solusi (12) yang sesuai dengan syarat awal yang kedua $\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0$. Dengan menerapakan prinsip superposisi solusi, menyatakan bahwa jika $u_{mn}(r,\theta,t)$ adalah solusi homogen dari (1), maka kombinasi linier dari $u_{mn}(r,\theta,t)$ juga merupakan solusi dari (1). Akibatnya solusi (12) dapat dituliskan sebagai :

$$\boxed{u_1(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\cos c\lambda_{mn}t} \qquad (15)$$

Ambil $t = 0$ dan $\cos 0 = 1$, diperoleh

$$u_1(r,\theta,0) = f(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta) \quad (16)$$

yang merupakan generalisasi deret fourier $f(r,\theta)$ dalam $J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta$ dan $J_m(\lambda_{mn}r)\sin m\theta$, dimana a_{mn} dan b_{mn} merupakan generalisasi *koefisien Fourier* untuk fungsi *f*.

Untuk perhitungan a_{mn} dan b_{mn} digunakan deret Fourier dan deret Bessel. Tetapkan *r* dan pandang $f(r,\theta)$ fungsi priodik dalam θ dengan periode 2π , sehingga persamaan (16) dapat dituliskan sebagai :

$$f(r,\theta) = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}J_0(\lambda_{0n}r)}^{=A_0(r)} + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\overbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)\right)}^{=A_m(r)}\cos m\theta + \overbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)\right)}^{=B_m(r)}\sin m\theta\right\} \quad (17a)$$

atau

$$f(r,\theta) = A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\{A_m(r)\cos m\theta + B_m(r)\sin m\theta\}. \quad (17b)$$

Tampak jelas bahwa (untuk r tetap), $A_0(r), A_m(r)$ dan $B_m(r)$ adalah koefisien-koefisien di dalam ekspansi deret Fourier dari $\theta \mapsto f(r,\theta)$ yang dapat dihitung dengan *formula Euler*.
Integralkan kedua ruas pada (17b), menjadi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A_0(r)d\theta + \sum_{m=0}^{\infty}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(A_m(r)\cos m\theta + B_m(r)\sin m\theta)d\theta}^{=0}$$

Integral suku kedua diruas kanan sama dengan nol, karena $\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sin m\theta = 0$, untuk $m = 1,2,\cdots$.
Akibatnya $\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A_0 d\theta = 2\pi A_0$, atau

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)d\theta \overset{atau}{\triangleq} \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)d\theta \quad (18a)$$

Untuk menghitung $A_m(r)$ dan $B_m(r)$, kalikan kedua ruas pada (17b) dengan $\cos(n\theta), n > 1$ kemudian integralkan:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\cos n\theta\, d\theta = \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} A_0 cos\, n\theta\, d\theta}^{=0} + \sum_{m=1}^{\infty}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} A_m cos\, n\theta\, cos\, m\theta\, d\theta}^{=\pi, for\ m=n\ and\ 0, for\ m\neq n}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} B_m cos\, n\theta\, sin\, m\theta\, d\theta}^{=0}$$

Misalkan $m = n$, diperoleh $\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, d\theta = A_m \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 m\theta\, d\theta}^{=\pi} = A_m\pi$ atau

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, d\theta \overset{atau}{\triangleq} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, d\theta \quad (18b)$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\sin m\theta\, d\theta \overset{atau}{\triangleq} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)\sin m\theta\, d\theta \quad (18c)$$

Gunakan **koefisien Bessel-Fourier** untuk mendapatkan a_{0n}, a_{mn} dan b_{mn} sebagai berikut.

Kalikan kedua ruas dengan $J_0(\lambda_{0s}r)r$ pada persamaan $A_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}J_0(\lambda_{0n}r)$ kemudian integralkan, diperoleh

$$\int_0^a A_0(r)J_0(\lambda_{0s}r)r\,dr = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \overbrace{\int_0^a J_0(\lambda_{0n}r)J_0(\lambda_{0s}r)r\,dr}^{=0 \text{ exept when } n=s} \quad , \; a>0 .$$

Berdasarkan Teorema orthogonality Bessel menunjukkan bahwa bentuk integral ruas kanan semua bernilai 0 kecuali jika $n = s$. Abaikan bentuk yang bernilai 0, dan setting $n = s$, diperoleh

$\int_0^a A_0(r)J_0(\lambda_{0n}r)rdr = a_{0n}\int_0^a J_0^2(\lambda_{0n}r)rdr$ atau

$$a_{0n} = \frac{\int_0^a A_0(r)J_0(\lambda_{0n}r)r\,dr}{\int_0^a J_0^2(\lambda_{0n}r)r\,dr}.$$

Berdasarkan sifat *ortogonalitas*, integral pada penyebut menghasilkan $\frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_{0n})$, sehingga diperoleh

$$a_{0n} = \frac{2}{a^2J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a A_0(r)J_0(\lambda_{0n}r)rdr \;, \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \; . \tag{19a}$$

Kalikan kedua ruas dengan $J_m(\lambda_{ms}r)r$ pada persamaan $A_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)$ kemudian integralkan, diperoleh

$$\int_0^a A_m(r)J_m(\lambda_{ms}r)rdr = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \overbrace{\int_0^a J_m(\lambda_{mn}r)J_m(\lambda_{ms}r)rdr}^{=0\text{ ,exept when } n=s}, \text{ atau}$$
$$\int_0^a A_m(r)J_m(\lambda_{mn}r)rdr = a_{mn}\int_0^a J_m^2(\lambda_{mn}r)rdr \qquad \text{atau}$$
$$a_{mn} = \frac{\int_0^a A_m(r)J_m(\lambda_{mn}r)r\,dr}{\int_0^a J_m^2(\lambda_{mn}r)r\,dr}$$

Berdasarkan sifat *ortogonalitas*, integral pada penyebut menghasilkan $\frac{a^2}{2}J_m^2(\alpha_{mn})$, sehingga diperoleh

$$a_{mn} = \frac{2}{a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a A_m(r)J_m(\lambda_{mn}r)rdr \tag{19b}$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$b_{mn} = \frac{2}{a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a B_m(r)J_m(\lambda_{mn}r)rdr \tag{19c}$$

Selanjutnya, subtitusi (18a), (18b) dan (18c) masing-masing kedalam (19a), (19b) dan (19c), diperoleh koefisien-koefisein

$$a_{0n} = \frac{1}{\pi a^2J_1^2(\alpha_{on})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)J_0(\lambda_{0n}r)r\,d\theta dr \tag{20a}$$
$$a_{mn} = \frac{2}{\pi a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, J_m(\lambda_{mn}r)r\,d\theta dr \tag{20b}$$
$$b_{mn} = \frac{2}{\pi a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\sin m\theta\, J_m(\lambda_{mn}r)r\,d\theta dr \tag{20c}$$

Subtitusi koefisien-koefisien (20a), (20b) dan (20c) ke dalam persamaan (15), diperoleh solusi komplit dari problem (1) - (3) untuk *zero iniial velocity*, yaitu

$$\boxed{u_1(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\cos c\lambda_{mn}t}$$

■

<u>Kasus II</u>. Getaran selaput dengan syarat awal untuk *zero initial displacement* $f(r,\theta) = 0$.

Syarat awal dalam kasus II ini adalah

$$\boxed{u(r,\theta,0) = f(r,\theta) = 0}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta),$$

dengan $0 < r < a$, $0 < \theta < 2\pi$, dan syarat batas (3).

Mudah terlihat bahwa produk solusi dalam bentuk $R(r)\Theta(t)T(t)$, yang memenuhi $T(0) = 0$ dan $u(r,\theta,0) = f(r,\theta) = 0$ (*zero initial displacement*) adalah solusi (13). Dan dengan prinsip superposisi, (13) dapat dituliskan sebagai:

$$\boxed{u_2(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)\{a_{mn}^*\cos m\theta + b_{mn}^*\sin m\theta\}\sin(c\lambda_{mn}t)},$$

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}. \tag{22}$$

Turunkan secara parsial terhadap *t* dari persamaan (22), diperoleh

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}^*\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)c\lambda_{mn}\cos(c\lambda_{mn}t)$$

Sehingga *initial velocity* adalah

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}^*\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\,c\lambda_{mn} \tag{23}$$

Untuk perhitungan koefisien-koefisiennya, serupa dengan kasus I.

Tetapkan r, dan pandang $g(r,\theta)$ sebagai fungsi θ (periode 2π), sehingga (23) dapat dituliskan sebagai :

$$g(r,\theta) = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{0n}a_{0n}^*J_0(\lambda_{0n}r)}^{=A_0^*(r)} \tag{24}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\overbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{mn}a_{mn}^*J_m(\lambda_{mn}r)\right)}^{=A_m^*(r)}\cos m\theta + \overbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{mn}b_{mn}^*J_m(\lambda_{mn}r)\right)}^{=B_m^*(r)}\sin m\theta\right\}$$

atau

$$g(r,\theta) = A_0^*(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\{A_m^*(r)\cos m\theta + B_m^*(r)\sin m\theta\}. \tag{25}$$

Sekarang tampak jelas bahwa (untuk r tetap), fungsi g menjadi fungsi dalam θ saja, dan $A_0^*(r)$, $A_m^*(r)$ dan $B_m^*(r)$ adalah koefisien-koefisien dari deret Fourier $\theta \mapsto g(r,\theta)$. Koefisien-koefisien $A_0^*(r)$, $A_m^*(r)$ dan $B_m^*(r)$, dihitung dengan *formula Euler* berikut:
Integralkan kedua ruas dari (25), diperoleh

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta)\, \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A_0^*\, d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (A_m^* cos\; m\theta + B_m^*\; sin\; m\theta)\; d\theta}^{=0}$$

Karena $\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta\; d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta = 0,\, m = 1,2,\cdots$

maka $\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A_0^* d\theta = 2\pi\, A_0^*$ atau

$$A_0^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta) d\theta \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} g(r,\theta) d\theta \qquad (26a)$$

Untuk menentukan koefisien A_m^* dan B_m^*, kalikan $\cos n\theta$ $(n \geq 1)$ pada kedua ruas pada (25), kemudian integralkan, diperoleh

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta) \cos n\theta\; d\theta = \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} A_0^* cos\; n\theta\; d\theta}^{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} A_m^* cos\; n\theta\; cos\; m\theta\; d\theta}^{=\pi, for\; m=n\; and\; 0, for\; m\neq n}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} B_m^* cos\; n\theta\; sin\; m\theta\; d\theta}^{=0}$$

Setting $m = n$, diperoleh $\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta) \cos m\theta\; d\theta = A_m^* \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 m\theta\; d\theta}^{=\pi} = A_m^* \pi$ atau

$$A_m^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta) \cos m\theta\; d\theta \equiv \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} g(r,\theta) \cos m\theta\; d\theta \qquad (26b)$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$B_m^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta) \sin m\theta\; d\theta \equiv \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} g(r,\theta) \sin m\theta\; d\theta \qquad (26c)$$

Sekarang, misalkan r bervariasi, maka tiga deret terakhir merupakan ekspansi deret Fourier orde $m = 0,1,2,\cdots$ berturut-turut dari fungsi $A_0^*(r)$, $A_m^*(r)$ dan $B_m^*(r)$. Koefisien dalam deret ini adalah koefisien Bessel. Gunakan **koefisien Bessel-Fourier** untuk mendapatkan a_{0n}^*, a_{mn}^* dan b_{mn}^* sebagai berikut.
Kalikan $J_0(\lambda_{0s} r) r$ pada kedua ruas persamaan $A_0^*(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{0n} a_{0n}^* J_0(\lambda_{0n} r)$ kemudian integralkan, menjadi

$$\int_0^a A_0^*(r) J_0(\lambda_{0s} r) r dr = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{0n} a_{0n}^* \overbrace{\int_0^a J_0(\lambda_{0n} r) J_0(\lambda_{0s} r) r\; dr}^{=0, exept\; when\; n=s} \quad , a > 0$$

Berdasarkan Teorema orthogonality Bessel, untuk $= s$, diperoleh

$$c\lambda_{0n} a_{0n}^* = \frac{\int_0^a A_0^*(r) J_0(\lambda_{0n} r) r\; dr}{\int_0^a J_0^2(\lambda_{0n} r) r dr} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_{on})} \int_0^a A_0^*(r) J_0(\lambda_{0n} r) r\; dr,$$

atau

$$a_{0n}^{*}=\frac{2}{c\lambda_{0n}a^{2}J_{1}^{2}(\alpha_{0n})}\int_{0}^{a}A_{0}^{*}(r)J_{0}(\lambda_{0n}r)rdr \text{ , dengan } \lambda_{0n}=\frac{\alpha_{0n}}{a} \text{ ,}$$

diperoleh

$$a_{0n}^{*}=\frac{2}{ca\alpha_{0n}J_{1}^{2}(\alpha_{0n})}\int_{0}^{a}A_{0}^{*}(r)J_{0}(\lambda_{0n}r)rdr \tag{27a}$$

Dengan cara serupa, kalikan $J_m(\lambda_{ms}r)r$ pada kedua ruas persamaan $A_m^*(r)=\sum_{n=1}^{\infty}c\lambda_{mn}a_{mn}^*J_m(\lambda_{mn}r)$, kemudian integralkan, diperoleh

$$\int_{0}^{a}A_{m}^{*}(r)J_{m}(\lambda_{ms}r)rdr=\sum_{n=1}^{\infty}c\lambda_{mn}a_{mn}^{*}\overbrace{\int_{0}^{a}J_{m}(\lambda_{mn}r)J_{m}(\lambda_{ms}r)r\,dr}^{=0,exept\ when\ n=s} \quad ,a>0$$

Berdasarkan Teorema orthogonality Bessel, untuk $n=s$, diperoleh

$$c\lambda_{mn}a_{mn}^{*}=\frac{\int_{0}^{a}A_{m}^{*}(r)J_{m}(\lambda_{mn}r)r\,dr}{\int_{0}^{a}J_{m}^{2}(\lambda_{mn}r)rdr}=\frac{2}{a^{2}J_{m+1}^{2}(\alpha_{mn})}\int_{0}^{a}A_{m}^{*}(r)J_{m}(\lambda_{mn}r)r\,dr\text{atau}$$

$$a_{mn}^{*}=\frac{2}{c\lambda_{mn}a^{2}J_{m+1}^{2}(\alpha_{mn})}\int_{0}^{a}A_{m}^{*}(r)J_{m}(\lambda_{mn}r)rdr \text{ ,}$$

dengan $\lambda_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{a}$, diperoleh

$$a_{mn}^{*}=\frac{2}{ca\alpha_{mn}J_{m+1}^{2}(\alpha_{mn})}\int_{0}^{a}A_{m}^{*}(r)J_{m}(\lambda_{mn}r)rdr \tag{27b}$$

Dengan cara serupa diperoleh

$$b_{mn}^{*}=\frac{2}{ca\alpha_{mn}J_{m+1}^{2}(\alpha_{mn})}\int_{0}^{a}B_{m}^{*}(r)J_{m}(\lambda_{mn}r)rdr \tag{27c}$$

Selanjutnya, subtitusi (26a), (26b) dan (26c) masing-masing ke dalam (27a), (27b) dan (27c) diperoleh koefisien-koefisien

$$a_{on}^{*}=\frac{2}{\pi ca\alpha_{0n}J_{1}^{2}(\alpha_{0n})}\int_{0}^{a}\int_{0}^{2\pi}g(r,\theta)\,J_{0}(\lambda_{0n}r)rd\theta dr \tag{28a}$$

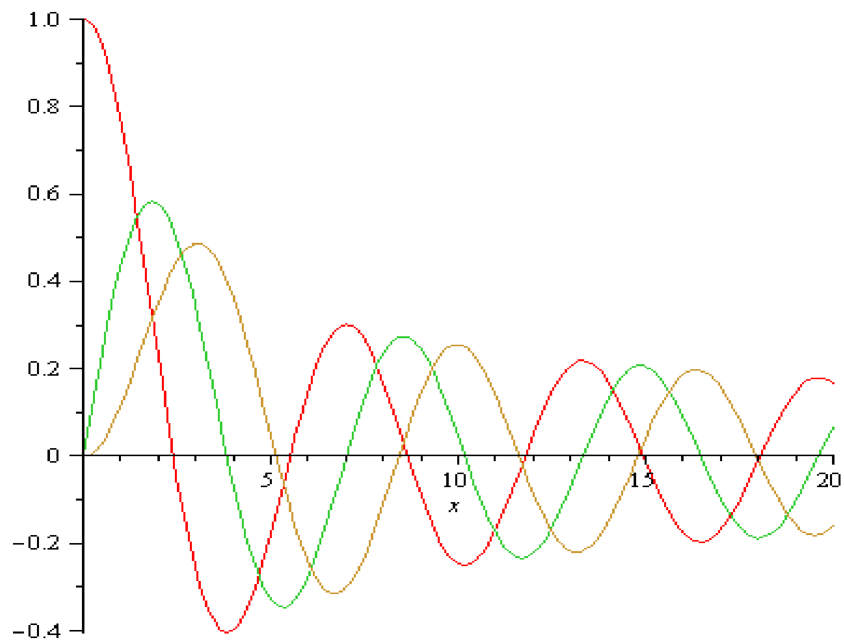
$$a_{mn}^{*}=\frac{2}{\pi ac\alpha_{mn}J_{m+1}^{2}(\alpha_{mn})}\int_{0}^{a}\int_{0}^{2\pi}g(r,\theta)\cos m\theta\,J_{m}(\lambda_{mn}r)rdr \quad ,m,n=1,2,\cdots \tag{28b}$$

$$b_{mn}^{*}=\frac{2}{\pi ac\alpha_{mn}J_{m+1}^{2}(\alpha_{mn})}\int_{0}^{a}\int_{0}^{2\pi}g(r,\theta)\sin m\theta\,J_{m}(\lambda_{mn}r)rdr \quad ,m,n=1,2,\cdots \tag{28c}$$

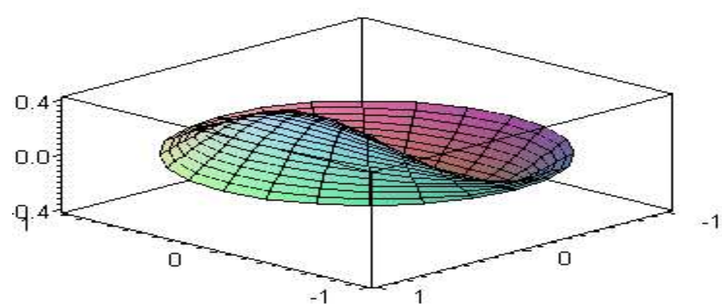
Subtitusi koefisien-koefisien (28a), (28b) dan (28c) ke dalam persamaan (22) , yaitu

$$u_{2}(r,\theta,t)=u^{*}(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_{m}(\lambda_{mn}r)(a_{mn}^{*}\cos m\theta+b_{mn}^{*}\sin m\theta)\sin c\lambda_{mn}t$$

diperoleh solusi kasus II (*Circular membrane with zero initial displacement*). ■



Gambar 1. Grafik Fungsi Bessel Orde 0, 1, 2.



Gambar 2. Vibrating Circular Membrane Nonradially Symmetric.

3. Solusi General

Berdasarkan Prinsipal Superposisi maka solusi komplit dari masalah syarat batas problem (1)–(3), yaitu

$$\boxed{\begin{array}{ll} Problem \quad (1) & c^2\nabla^2 u \iff \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \\ & dengan\ 0 < r < a\ , 0 < \theta < 2\pi\ , t > 0 \\ Syarat\ awal\ \ (2) & (i)\ \ u(r,\theta,0) = f(r,\theta)\ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0 \\ & (ii)\ \ u(r,\theta,0) = 0\ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta) \\ Syarat\ batas\ \ (3) & u(a,\theta,t) = 0 \end{array}}$$

diberikan oleh

$$u(r,\theta,t) = u_1(r,\theta,t) + u_2(r,\theta,t) \tag{29}$$

atau

$$\boxed{\begin{aligned} u(r,\theta,t) = {} & \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)\{a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\}\cos(c\lambda_{mn} t) \\ & + \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)\{a_{mn}^*\cos m\theta + b_{mn}^*\sin m\theta\}\sin(c\lambda_{mn} t) \end{aligned}} \tag{30}$$

dimana

$$\boxed{\begin{gathered} a_{0n} = \frac{1}{\pi a^2 J_1^2(\alpha_{on})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta) J_0(\lambda_{0n} r) r\, d\theta dr \\ a_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r) r\, d\theta dr \\ b_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\sin m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r) r\, d\theta dr \\ a_{on}^* = \frac{2}{\pi c a \alpha_{0n} J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a\int_0^{2\pi} g(r,\theta) J_0(\lambda_{0n} r) r d\theta dr \\ a_{mn}^* = \frac{2}{\pi a c \alpha_{mn} J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\cos m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r) r dr \\ b_{mn}^* = \frac{2}{\pi a c \alpha_{mn} J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\sin m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r) r dr \\ \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}\quad , a_{mn}\ is\ the\ n^{th} positive\ zero\ of\ J_m \end{gathered}}$$

3. Kesimpulan dan Saran

Masalah getaran pada selaput melingkar (*vibration of circular membrane*) dalam kasus umum, dimana syarat awal (*displacement* dan *velocity*) berupa fungsi $f(r,\theta)$ dan $g(r,\theta)$ tanpa asumsi simetri radial. Getaran selaput melingkar diuraikan melalui persamaan gelombang dua dimensi yang diekspresikan dalam koordinat polar, karena dengan sistem koordinat polar ini merupakan cara terbaik untuk menurunkan masalah ini.

Karena penurunan solusi umum dari masalah ini cukup rumit (kompleks), maka masalahnya dapat dipandang sebagai dua kasus secara terpisah. Kasus 1, getaran selaput melingkar dengan syarat awal $g(r,\theta) = 0$ (*zero initial velocity*). Kasus 2, getaran selaput melingkar dengan syarat awal $f(r,\theta) = 0$ (*zero initial displacement*). Dengan menggunakan principal superposisi, kombinasi linier dari solusi kedua kasus memberikan solusi lengkap dari masalah getaran pada selaput melingkar secara umum.

Mengingat aplikasi masalah ini cukup luas, dan dapat dibuat program dan animasi yang menarik, sehingga disarankan kepada mahasiswa tugas akhir kiranya dapat menelaah dan mengembangkan tulisan ini lebih mendalam.

Daftar Pustaka

[1] Nakhle, H., 2005, *Partial Differential Equations, With Fourier Series and Boundary Value Problems*, Pearson Prentice Hall, USA.

[2] Haberman, R., 1987, *Elementary Applied Partial Differential Equation With Fourier Series and Boundary Value Problems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.