ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol 12, No 1, 19-29, Juli 2015

Analisis Penyelesaian Persamaan Kuadrat Matriks

Hasmawati* dan Amir Kamal Amir**

Abstrak

Persamaan kuadrat matriks $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0,$ dalam matriks n x n muncul dalam dunia aplikasi dan merupakan salah satu persamaan matriks nonlinier yang paling sederhana. Kita memberikan karakterisasi lengkap dari penyelesaian dalam bentuk generalisasi dekomposisi Schur. Beberapa variasi dari teknik penyelesaian numerik juga disajikan.

Keywords: dekomposisi Schur, iterasi fungsional, karakterisasi Solvent, metode Newton.

1. Pendahuluan

Untuk menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks, dapat diselesaikan secara langsung dengan menggunakan masalah nilai eigen kuadrat. Persamaan kuadrat matriks jika dihubungkan dengan masalah nilai eigen kuadratik adalah:

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0 \tag{1}$$

Teori matriks-λ: jika X adalah pemecahan dari $Q(X)$ maka $X - \lambda I$ adalah pembagi kanan dari $Q(\lambda)$ dan hal ini mudah untuk dibuktikan karena hasil baginya dalam bentuk sederhana yaitu:

$$\lambda^2 A + \lambda B + C = -(B + AX + \lambda A)(X - \lambda I) \tag{2}$$

Karena pasangan nilai eigen dari X adalah pasangan nilai eigen dari $Q(\lambda)$ maka solusinya dapat dikonstruksi dalam bentuk pasangan nilai eigen dari $Q(\lambda)$. Jika $Q(\lambda_i)w_i = 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ maka

$$AW(diag(\lambda_i))^2 + BW\, diag(\lambda_i) + CW = 0 \tag{3}$$

di mana $W = [w_1, \ldots, w_n]$ dengan W adalah nonsingular. Persamaan (3) dikalikan dengan W^{-1} dari kanan, maka diperoleh

$$AW\, diag((\lambda_i))^2 W^{-1} + BW\, diag(\lambda_i) W^{-1} + CW\, W^{-1} = 0$$

Jadi $X = W\, diag(\lambda_i) W^{-1}$ adalah solusi.

Teorema 1.

Misalkan $Q(\lambda)$ mempunyai nilai eigen yang berbeda $\{\lambda_i\}_{i=1}^p$ dengan $n \le p \le 2n$ dan bersesuaian dengan himpunan vektor eigen $\{v_i\}_{i=1}^p$ yang memenuhi kondisi Haar (setiap subset dari n vektor eigen adalah bebas linear), maka terdapat paling sedikit C_n^p solusi yang berbeda dari $Q(X)$ dan tepatnya jika $p = 2n$, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$X = W\, diag(\lambda_i) W^{-1} \quad \text{dan} \quad W = [w_1, \ldots, w_n] \tag{4}$$

---

* Alumni pada Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin Makassar
** Staf Pengajar pada jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin

di mana pasangan nilai eigen $(\lambda_i, w_i)_{i=1}^{n}$ adalah dipilih diantara pasangan nilai eigen $(\lambda_i, w_i)_{i=1}^{p}$ dari *Q*.

Bukti:

Terdapat C_n^p pilihan dari X pada persamaan (4).

Karena $\lambda_i^2 Aw_i + \lambda_i w_i + Cw_i = 0$, maka $AW(\,diag(\lambda_i))^2 + BW\,diag(\lambda_i) + CW = 0$. Dan selanjutnya dikalikan dari kanan dengan W^{-1}, maka

$$AW\,diag((\lambda_i))^2 W^{-1} + BW\,diag(\lambda_i)W^{-1} + CW\,W^{-1} = 0$$

Agar C_n^p adalah solusi yang berbeda maka tidak boleh ada nilai eigen yang sama. Dari persamaan (2) diasumsikan bahwa $Q(\lambda)$ mempunyai *p* nilai eigen, maka terdapat solusi *X* dengan nilai eigen yang berbeda sehingga dapat didiagonalisasi. Karena pasangan nilai eigen dari *X* juga merupakan pasangan nilai eigen dari $Q(\lambda)$, maka *X* dapat dituliskan

$$X = W\,diag(\lambda_i)W^{-1}, \qquad W = [w_1, \ldots, w_n]$$

Contoh:

Misalkan $Q(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$

Pasangan nilai eigen (λ_i, w_i) dari $Q(\lambda)$ diperoleh dari persamaan:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3 \qquad \lambda_4 = 4$$

Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut adalah

- Untuk $\lambda_1 = 1$ vektor eigennya adalah: $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Untuk $\lambda_2 = 2$ vektor eigennya adalah $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Untuk $\lambda_3 = 3$ vektor eigennya adalah $w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Untuk $\lambda_4 = 4$ vektor eigennya adalah $w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan *Teorema 1* di atas maka diperoleh solusi dari pasangan nilai eigen yang berbeda kecuali 3 dan 4, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Suatu jalan alternatif untuk mendekati teori Solvent adalah melalui sistem eigen dari suatu masalah generalisasi nilai eigen. Perkembangan berikut ini diinspirasikan oleh matriks untuk Persamaan Aljabar Riccati $XAX + BX + XC + D = 0$ yang dikarakterisasikan penyelesaian dalam suku-suku sistem eigen dari matriks

$$\begin{bmatrix} -C & -A \\ D & B \end{bmatrix}$$

Analisis ini ditemukan oleh Anderson(1966) dan Ratter (1966).

Kita mulai dengan sebuah lemma yang mengkarakterisasi Solvent. Kita definisikan :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad G = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{5}$$

Lemma 2.

X adalah solusi dari $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$ jika dan hanya jika

$$F\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X \quad . \tag{6}$$

Bukti:

Lemma diatas dapat diinterpretasikan bahwa X adalah sebuah Solvent jika dan hanya jika kolom-kolom dari $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ membangun sebuah ruang bagian deflasi. (Interwart & Sum, 1990) untuk pasangan *(F,G)*

Lemma 2 dapat dikembangkan menjadi karakterisasi yang lebih konkrit dari Solvent dengan mempresentasikan ruang bagian deflasi yang disyaratkan dalam suku-suku dari sistem eigen pasangan (F, G).

Sebagai ganti dari bentuk kronik Kronecher kita menggunakan generalisasi dekomposisi Schur (Gohub & Van Loen, 1996)

2. Metode Schur

Metode kedua adalah metode Schur. Disini solusi akan dihitung dengan menggunakan generalisasi dekomposisi Schur $Q^{*}FZ = T$, $Q^{*}GZ = S$ dari F dan G pada (5). Teorema berikut akan menunjukkan bahwa jika Z_{11} adalah nonsingular maka $X = Z_{21}\, Z_{11}^{-1} = Q_{11}\, T_{11}\, S_{11}^{-1}\, Q_{11}^{-1}$ adalah solusi.

Teorema 3.

Setiap pemecahan dari *Q(X)* adalah berbentuk $X = Z_{21}\, Z_{11}^{-1} = Q_{11}\, T_{11}\, S_{11}^{-1}\, Q_{11}^{-1}$ di mana

$$Q * FZ = T\ , \qquad Q * GZ = S \tag{7}$$

adalah generalisasi dekomposisi Schur dengan Q dan Z adalah matriks uniter, T dan S adalah matriks segitiga atas dan setiap matriks adalah matriks blok 2×2 .

Bukti

Pertama kita akan tunjukkan bahwa $X = Z_{21} Z_{11}^{-1}$ dengan Z_{11} nonsingular adalah solusi. Dari persamaan (7) yakni $Q * FZ = T$ dan $Q * FZ = T$ dikalikan dengan Q dari kiri, maka diperoleh

$$FZ = QT \qquad \text{dan} \qquad GZ = QS$$

- Untuk $FZ = QT$, maka

$$FZ = QT$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ -CZ_{11} - BZ_{21} & -CZ_{12} - BZ_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}T_{11} & Q_{11}T_{12} + Q_{12}T_{22} \\ Q_{21}T_{11} & Q_{21}T_{12} + Q_{22}T_{22} \end{bmatrix}$$

- Untuk $GZ = QS$, maka

$$GZ = QS$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ AZ_{21} & AZ_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}S_{11} & Q_{11}S_{12} + Q_{12}S_{22} \\ Q_{21}S_{11} & Q_{21}S_{12} + Q_{22}S_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$Z_{21} = Q_{11}T_{11} \quad \text{atau} \quad Q_{11}^{-1}Z_{21} = T_{11} \qquad (8)$$

$$-CZ_{11} - BZ_{21} = Q_{21}T_{11} \qquad (9)$$

$$Z_{11} = Q_{11}S_{11} \quad \text{atau} \quad Z_{11}^{-1}Q_{11} = S_{11}^{-1} \qquad (10)$$

$$AZ_{21} = Q_{21}S_{11} \quad \text{atau} \quad AZ_{21}S_{11}^{-1} = Q_{21} \qquad (11)$$

Persamaan (9) dikalikan dari kanan dengan Z_{11}^{-1}, maka diperoleh

$$(-CZ_{11} - BZ_{21})Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$-CZ_{11}Z_{11}^{-1} - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$-CI - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$-C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1} \qquad (12)$$

Selanjutnya persamaan (8) disubtitusi ke persamaan (12), maka diperoleh

$$-C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}Q_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \qquad (13)$$

Persamaan (11) disubstitusi ke persamaan (13), maka diperoleh:

$$-C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = AZ_{21}S_{11}^{-1}Q_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \qquad (14)$$

Persamaan (10) disubtitusi ke persamaan (14), maka diperoleh

$$\begin{aligned} -C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} &= AZ_{21}Z_{11}^{-1}Q_{11}Q_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \\ &= AZ_{21}Z_{11}^{-1}I\,Z_{21}Z_{11}^{-1} \\ &= AZ_{21}Z_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh

$$X = Z_{21} Z_{11}^{-1}$$

Misalkan X adalah solusi dari $Q(X)$ yang memenuhi *lemma 2* yakni persamaan (6). Misalkan pula

$$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

adalah faktorisasi QR. Itu mudah dilihat bahwa R dan Z_{11} adalah nonsingular dan

$$X = Z_{21}R = Z_{21}Z_{11}^{-1}.$$

Dari persamaan (7) yaitu $Q^*GZ = S$ dikalikan dengan Q dari kiri, maka diperoleh

$$GZ = QS$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

yang merupakan faktorisasi QR .

Persamaan (6) dikalikan dari kiri dengan Q^* dan dengan menggunakan persamaan (15) diperoleh;

$$Q^*F \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = Q^*G \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X$$

Dan selanjutnya substitusi persamaan (15), sehingga diperoleh

$$Q^*FZ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q^*G \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$T \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$\begin{bmatrix} T_{11}R \\ T_{21}R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}R\,X \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh $T_{21}R = 0$ dan mengakibatkan $T_{21} = 0$. Dan persamaan di atas, sebagai pelengkap generalisasi dekomposisi Schur untuk penguat $X = Z_{21} Z_{11}^{-1}$. Akhirnya diperoleh

$$X = Z_{21} Z_{11}^{-1} = Q_{11} T_{11} S_{11}^{-1} Q_{11}^{-1}.$$

Aspek tersembunyi dari *teorema 3* adalah suatu catatan berharga. Jika A adalah singular maka persamaan (11) menunjukkan Q_{21} atau S_{11} adalah singular. Namun, sebaliknya bagian pembuktian menunjukkan bahwa jika solusinya ada maka akan dipilih generalisasi dekomposisi Schur dengan S_{11} dan Z_{11} adalah nonsingular. Untuk contoh jika $A = C = 0$ dan $B = I$, solusinya hanya matriks nol maka dapat diambil $Q = Z = I$ dan $S_{11} = Z_{11} = I$.

3. Metode Newton

Metode Newton untuk memecahkan persamaan kuadrat matriks dijabarkan dengan menggunakan ekspansi untuk $Q(X+E)=0$

$$\begin{aligned} Q(X+E) &= A(X+E)^2 + B(X+E) + C \\ &= A(X+E)(X+E) + B(X+E) + C \\ &= A(X^2 + XE + EX + E^2) + BX + BE + C \\ &= AX^2 + AXE + AEX + AE^2 + BX + BE + C \\ &= Q(X) + AXE + AEX + BE + AE^2 \\ &= Q(X) + [AEX + (AX+B)E] + AE^2 \end{aligned}$$

diperoleh

$$Q(X) + [AEX + (AX+B)E] + AE^2 = 0$$

Dengan mengabaikan AE^2 maka diperoleh:

$$[AEX + (AX+B)E] = -Q(X)$$

Dengan iterasi dituliskan

$$[AE_k X_k + (AX_k + B)E_k] = -Q(X_k)$$

dan untuk mendapatkan matrik X pada persamaan kuadrat matriks $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$, maka digunakan persamaan berikut :

$$X_{k+1} = X_k + E_k \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

4. Iterasi Fungsional

Salah satu cara untuk mencoba memecahkan persamaan kuadrat matriks $AX^2 + BX + C = 0$ adalah dengan menuliskan dalam bentuk

$$X = F(X)$$

Dan melalui iterasi didefinisikan : $X_{k+1} = F(X_k)$. Disini diasumsikan bahwa A adalah nonsingular. Ini dapat diselesaikan dengan beberapa cara yaitu:

$$X_{k+1} = (-A^{-1}(BX_k + C))^{1/2} \quad (16)$$

$$X_{k+1} = -B^{-1}(AX_k^2 + C) \quad (17)$$

$$X_{k+1} = -A^{-1}(B + CX_k^{-1}) \quad (18)$$

Iterasi di atas tidak dapat ditransformasikan ke bentuk sederhana, sehingga sulit untuk mendapatkan hasil yang konvergen dari aplikasi yang praktis. Namun demikian hasil yang banyak berguna dan beberapa variasi dapat diperoleh dari analisis iterasi Bernoulli.

4.1 Iterasi Bernoulli

Misalkan persamaan kuadrat matriks $AX^2 + BX + C = 0$ dituliskan dalam matriks rekurensi

$$AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1} = 0 \tag{20}$$

dimana Y_0, Y_1 diberikan.
Dan didefinisikan:

$$V(S_1, S_2) = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.

Jika S_1 dan S_2 adalah solusi dari $Q(X)$ di mana $V(S_1, S_2)$ adalah nonsingular maka

$$Y_i = S_1^i \Omega_1 + S_2^i \Omega_2 \tag{21}$$

adalah solusi umum dari persamaan (20), di mana Ω_1 dan Ω_2 adalah ditentukan oleh kondisi awal.

Bukti

Untuk Y_i yang didefinisikan oleh persamaan (21), maka persamaan (20) dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1} &= A(S_1^{i+1}\Omega_1 + S_2^{i+1}\Omega_2) + B(S_1^i\Omega_1 + S_2^i\Omega_2) + C(S_1^{i-1}\Omega_1 + S_2^{i-1}\Omega_2) \\ &= (AS_1^{i+1} + BS_1^i + CS_1^{i-1})\Omega_1 + (AS_2^{i+1} + BS_2^i + CS_2^{i-1})\Omega_2 \\ &= (AS_1^2 + BS_1 + C)S_1^{i-1}\Omega_1 + (AS_2^2 + BS_2 + C)S_2^{i-1}\Omega_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi Y_i adalah solusi dari persamaan (20). Untuk *i = 0* dan *i = 1*, maka persamaan (21) adalah:

$$Y_0 = S_1^0\Omega_1 + S_2^0\Omega_2 = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$Y_1 = S_1^1\Omega_1 + S_2^1\Omega_2$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

Dan karena matriks koefisien $V(S_1, S_2)$ adalalah nonsingular, Ω_1 dan Ω_2 secara khusus ditentukan oleh Y_0 dan Y_1.

Misalkan Z_i adalah solusi dari persamaan (20) dan misalkan Y_i adalah solusi dari persamaan (21) dengan $Y_0 = Z_0$ dan $Y_1 = Z_1$, maka

$$AY_2 + BY_1 + CY_0 = 0$$

$$\begin{aligned} AY_2 &= -BY_1 - CY_0 \\ &= -BZ_1 - CZ_0 \\ &= AZ_2 \end{aligned}$$

Karena A nonsingular, $Z_2 = Y_2$. Dengan induksi $Z_i = Y_i$ untuk setiap i .

Secara umum S_1 dan S_2 dengan kondisi $\lambda(S_1) \cap \lambda(S_2) = \varnothing$ akan menjamin $V(S_1, S_2)$ nonsingular. Hal ini diperjelas dalam teorema berikut :

Teorema 5.

Jika S_1 dan S_2 adalah solusi dari $Q(X)$ dengan $\lambda(S_1) \cap \lambda(S_2) = \varnothing$ maka $V(S_1, S_2)$ adalah nonsingular.

Bukti

Misalkan $V(S_1, S_2)$ adalah singular. Dan misalkan $v \in N = null(V(S_1, S_2))$, maka $[S_1 \; S_2]v = 0$ dan kesamaan

$$[A^{-1}C \;\; A^{-1}B]\begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} = -[S_1^2 \;\; S_2^2]$$

Secara tidak langsung $[S_1^2 \; S_2^2]v = 0$, sehingga

$$0 = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} v \tag{22}$$

Jadi $diag(S_1, S_2)v \in N$ yang berarti bahwa N adalah invariant subspace untuk $diag(S_1, S_2)$. Oleh karena itu, N memuat vektor eigen w dari $diag(S_1, S_2)$. Karena nilai eigen S_1 dan S_2 berbeda, maka w mempunyai bentuk $w = [w_1{}^T \;\; 0]^T$ atau $w = [0 \;\; w_2{}^T]^T$.

Pada setiap kasus

$$0 = V(S_1, S_2)\, w = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} w$$

Sehingga mengakibatkan *w = 0*. Hal ini kontradiksi dengan w adalah vektor eigen. Jadi $V(S_1, S_2)$ nonsingular.

Agar mendapatkan hasil yang konvergen pada metode Bernoulli, maka dibutuhkan lemma berikut.

Lemma 6.

Misalkan Z_1 dan Z_2 adalah matriks kuadrat sehingga $\min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_1)\} > maks\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_2)\}$ maka Z_1 adalah nonsingular dan setiap norm matriks

$$\lim_{i \to \infty} \|Z_2^i\| \|Z_1^{-i}\| = 0$$

Bukti

Karena Z_1 dan Z_2 adalah matriks kuadrat yang memenuhi kondisi $\min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_1)\} > maks\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_2)\}$ maka Z_1 adalah solusi dominan dari $Q(X)$ dan Z_2 adalah solusi minimal dari $Q(X)$. Karena Z_1 merupakan solusi dominan, maka akibatnya Z_1 nonsingular.

Sehingga jelas untuk $\lim_{i \to \infty} \|Z_2^i\| \|Z_1^{-i}\| = 0$

Teorema 7.

Misalkan *Q(X)* mempunyai solusi dominan (S_1) dan solusi minimal (S_2) dan Y_i adalah solusi rekurensi (21) dengan $Y_0 = 0$ dan $Y_1 = I$. Maka Y_i adalah nonsingular jika *i* cukup besar dan

$$\lim_{i\to\infty} Y_i Y_{i-1}^{-1} = S_1$$

Bukti

Dari teorema 5, diperoleh $V(S_1, S_2)$ adalah nonsingular dan persamaan (21) adalah solusi umum dari persamaan (20). Dengan kondisi awal $Y_0 = 0$ dan $Y_1 = I$ maka

- Untuk $Y_0 = 0$, diperoleh $\Omega_1 + \Omega_2 = 0$
- Untuk $Y_1 = I$, diperoleh $S_1\Omega_1 + S_2\Omega_2 = I$

Sehingga diperoleh: $(S_1 - S_2)\Omega_1 = I$

Karena Ω_1 nonsingular, maka pertama ditunjukkan bahwa Y_i adalah nonsingular untuk *i* yang cukup besar.

Karena S_1 nonsingular maka persamaan (21), dapat dituliskan menjadi

$$Y_i = S_1^i(\Omega_1 + S_1^{-i} S_2 \Omega_2)$$

Dari lemma 6, diperoleh $S_1^{-i} S_2^i \to 0$ untuk *i* yang cukup besar, sehingga $Y_i = S_1^i \Omega_1$. Jadi Y_i adalah nonsingular untuk *i* yang cukup besar.

Dengan menggunakan persamaan (22)

$$\begin{aligned} Y_i Y_{i-1}^{-1} &= (S_1^i\Omega_1 + S_2^i\Omega_2)(S_1^{i-1}\Omega_1 + S_2^{i-1}\Omega_2)^{-1} \\ &= (S_1 + S_2^i\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})(S_1^{i-1}\Omega_1)((I + S_2^{i-1}\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})(S_1^{i-1}\Omega_1))^{-1} \\ &= (S_1 + S_2^i\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})\ (I + S_2^{i-1}\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})^{-1} \end{aligned}$$

Dari lemma 6 maka disimpulkan

$$\lim_{i\to\infty} S_2^i\Omega_1\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{i\to\infty} S_2^{i-1}\Omega_1\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)} = 0$$

Jadi diperoleh:

$$\lim_{i\to\infty} Y_i Y_{i-1}^{-1} = S_1$$

Contoh

$$Q(X) = X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan iterasi Bernoulli dan menetapkan $Y_0 = 0$ dan $Y_1 = I$, dari persamaan (20) maka diperoeh

$$\begin{aligned} AY_2 + BY_1 + CY_0 &= 0 \\ AY_2 &= -(BY_1 + CY_0) \\ AY_2 &= -BI \\ Y_2 &= -A^{-1}BI \\ &= -A^{-1}B \end{aligned}$$

Jadi:

$$Y_2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari $AY_3 + BY_2 + CY_1 = 0$ maka

$$AY_3 = -(BY_2 + CY_1)$$

$$Y_3 = -A^{-1}(BY_2 + CY_1)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh $Y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Jika iterasi ini diteruskan, maka akan diperoleh $Y_2 = Y_4 = Y_6 = \cdots$ dan $Y_3 = Y_5 = Y_7 = \cdots$, sehingga dapat ditulis $Y_{2j} = Y_2$, $Y_{2j+1} = Y_3$ *untuk* $j \geq 1$. Oleh karena itu setiap Y_i adalah singular, sehingga untuk contoh di atas iterasi Bernoulli gagal.

4.2. Iterasi Untuk Menghitung Solusi

Untuk perhitungan yang lebih mudah, persamaan (20) dapat dituliskan dalam bentuk iterasi secara langsung untuk menentukan suatu solusi. Persamaan (20) dikalikan dari kanan dengan Y_{i-1}^{-1}, maka diperoleh

$$AY_{i+1}Y_{i-1}^{-1} + BY_iY_{i-1}^{-1} + C = 0$$

yang dapat dituliskan

$$(AY_{i+1}Y_i^{-1} + B)Y_iY_{i-1}^{-1} + C = 0$$

Dengan mendefinisikan $X_i = Y_{i+1}Y_i^{-1}$ dan menetapkan $Y_0 = 0$, $Y_1 = I$, maka diperoleh iterasi

$$(AX_i + B)X_{i-1} + C = 0$$

$$(AX_i + B)X_{i-1} = -C$$

$$AX_i + B = -CX_{i-1}$$

Untuk *i = 1*, maka $X_{i-1}^{-1} = X_0^{-1} = Y_1Y_0^{-1} = 0$

Jadi

$$AX_1 + B = -CX_0^{-1}$$

$$AX_1 = -B$$

$$X_1 = -A^{-1}B \qquad (23)$$

Dengan cara yang sama, persamaan (21) dikali dari kanan dengan Y_{i+1}^{-1}, maka diperoleh

$$(AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1})Y_{i+1}^{-1} = 0$$

$$A + BY_iY_{i+1}^{-1} + CY_{i-1}Y_{i+1}^{-1} = 0$$

Misalkan $W_i = Y_iY_{i+1}^{-1}$

$$A + (B + CW_{i-1})W_i = 0 \qquad W_0 = 0 \tag{24}$$

Iterasi ini untuk memecahkan $CX^2 + BX + A = 0$, yang mana solusinya adalah nonsingular yang merupakan invers dari solusi *Q(X) = 0.*

Dari teorema 7 disimpulkan bahwa jika *Q(X)* mempunyai solusi dominan S_1 dan solusi minimal S_2 serta barisan X_i dan W_i didefinisikan , maka

$$\lim_{i\to\infty} X_i = S_1 \quad \text{dan} \quad \lim_{i\to\infty} W_i = S_1^{-1}$$

Peranan Y_0 dan Y_1 pada pembuktian *Teorema 7* adalah untuk menjamin bahwa Ω_1 adalah nonsingular. Pada umumnya pemilihan Y_0 dan Y_1 akan berdampak yang sama, jadi dapat dicoba dimulai dengan matriks yang berbeda yaitu pada persamaan (23) dan (24), yang mungkin diperoleh jika iterasi mengalami kesulitan.

Iterasi (23) dan (24) adalah iterasi titik tertentu yang dapat diperoeh pada bentuk $AX^2 + BX + C = 0$. Iterasinya juga dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu

$$(AX_{i-1} + B)X_i + C = 0 \qquad X_0 = 0 \tag{25}$$

dan $A + (B + CW_i)W_{i-1} = 0 \qquad W_1 = -C^{-1}B$ (26)

Jika dihubungkan dengan rekurensi Bernoulli maka:

$$AZ_{i-1} + BZ_i + CZ_{i+1} = 0 \qquad Z_0 = 0,\ Z_1 = I \tag{27}$$

Jika *Q(X)* mempunyai solusi dominan S_1 dan suatu solusi minimal S_2 yang nonsingular maka solusi dari persamaan (27) adalah:

$$Z_i = S_1^i\Omega_1 + S_2^{-i}\Omega_2$$

dengan Ω_1 dan Ω_2 ditentukan oleh kondisi awal, dan

$$\lim_{i\to\infty} Z_{i+1}Z_i^{-1} = S_2^{-1}$$

Karena itu, selama barisan W_i dan X_i terdefinisi, maka

$$\lim_{i\to\infty} X_i = S_2 \qquad \lim_{i\to\infty} W_i = S_2^{-1}$$

Daftar Pustaka

[1] Benjamin F.P, 1992, "*An Introduction to Applied Numerical Analysis*", Pws-Kent Publishing Company, Boston.

[2] Gene H.G & Charles F.V.L, 1996, "*Matriks Computations*", The John Hopkins University Press, Baltimore and London, Third Edition.

[3] Nicholas JH & Hyun-Min Kim, 2000, "*Numerical analysis of a quadratic matrix Equation*", IMA Journal of Numerical Analysis 20, 499-519.

[4] Sastry S. S, 1997, "*Introductory methods of numerical analysis*", PHI.