ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 2, 139-148, Januari 2015

Penerapan Aproksimasi Fejer dalam Membuktikan Teorema Weierstrass

NaimahAris[1], Jusmawati M[2],Islamiyah Abbas[3],

Abstrak

Dalam tulisan ini dibahas pembuktian teorema aproksimasi Weierstrass dengan menggunakan teorema Fejer. Teorema aproksimasi Weierstrass menyatakan bahwa suatu fungsi yang kontinu pada suatu interval tutup dapat dihampiri oleh suatu polinomial. Oleh Fejer, teorema ini dibuktikan dengan menunjukkan bahwa suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu pada interval tutup $[-\pi,\pi]$ dengan $f(-\pi)=f(\pi)$dapat dihampiri oleh suatu polinomial rata-rata $\sigma_n(x)$ dan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x)$ konvergen seragam pada $[-\pi,\pi]$.

Kata Kunci:*aproksimasi Weierstrass, approksimasi Fejer*.

Abstract

This thesis discussed about proving Weierstrass approximation theorem by using Fejer theorem. The approximation theorem states that a continuous function on a closed interval can be approached by a polynomial. By Fejer, this theorem is proved by showing that a continuous function $f(x)$on a closed interval $[-\pi,\pi]$with $f(-\pi)=f(\pi)$can be approached by a polynomial average $\sigma_n(x)$then is proved thatlim$_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x)$ converges uniformly on $[-\pi,\pi]$.

Keywords: Weierstrass approximation theorem, Fejer theorem.

1. Pendahuluan

Dalam aplikasi-aplikasi matematika, umumnya menggunakan fungsi-fungsi yang jauh lebih rumit dari fungsi standar. Beberapa dari fungsi-fungsi tersebut tidak dapat diekspresikan dalam bentuk standar, dan beberapa lagi hanya diketahui secara implisit atau melalui grafiknya. Untuk kasus-kasus seperti itu digunakan suatu pendekatan/aproksimasi terhadap fungsi tersebut.[1]

Salah satu bentuk aproksimasi diberikan oleh Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1885) yang dikenal teorema Weierstrass yang menyatakan bahwa suatu fungsi yang kontinu pada suatu interval tutup dapat dihampiri oleh polinomial $P(x)$. Pembuktian teorema aproksimasi Weierstrass yang paling terkenal adalah pendekatan konstruktif melalui polinomial Bernstein oleh Sergei Bernstein pada tahun 1911 yaitu, jika f adalah sebuah fungsi kontinu bernilai real pada [0,1], maka barisan polinomial Bernstein $B_n(x;f)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}f\left(\frac{r}{n}\right)$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ konvergen seragam ke f.Pembuktian teorema aproksimasi Weierstrass juga dilakukan oleh Fejer dan Marshall Stone.Dalam tulisan ini, pembahasan difokuskan pada pembuktian teorema Weierstrass dengan menggunakan teorema Fejer. Permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada fungsi trigonometri yang kontinu dan terbatas pada interval $[-\pi,\pi]$ dimana fungsi-fungsinya bernilai real yang terdefinisi pada semua domain$\mathbb{R}$ dan periodik dengan periode 2π serta terintegralkan Riemann pada $[-\pi,\pi]$.

[1]*Prodi Matematika,Jurusan Matematika,Universitas Hasanuddin,email: : newima@gmail.com*

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

[2]*Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Hasanuddin, email: jusmawati@gmail.com*
[3]*Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Hasanuddin, email: islam_miyah@yahoo.co.id*

2. Tinjauan Pustaka

Terkait dengan permasalahan yang akan diselesaikan, kajian pustaka yang penting untuk dipahami adalah teori mengenai Fungsi Integral Riemann, dan Deret Fourier.

2.1 Integral Riemann

Definisi 2.1

Fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ disebut terintegralkan Riemann di $[a,b]$ jika terdapat bilangan $L \in \mathbb{R}$ sehingga $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ di $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}$ adalah partisi bertanda dari $[a,b]$ dengan $\|\dot{P}\| < \delta_\varepsilon$, maka$|S(f;\dot{P}) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.1

Jika $\{f_n(x)\}$ adalah barisan fungsi yang terintegral Riemann dan $\{f_n(x)\}$ konvergen seragam ke $f(x)$, maka $f(x)$ terintegral Riemann.

Teorema 2.2

Misalkan f positif dan monoton turun pada $\{t: t \geq 1\}$. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(t)\,dt$ada. Dalam hal $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen, jumlah parsial $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ dan jumlah $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ memenuhi

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt \leq s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(t)\,dt.$$

2.2 Deret Fourier

Definisi 2.2

Misal $f \in [-\pi,\pi]$, deret Fourier dari f diberikan oleh

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Dengan koefisien-koefisien Fourier berikut

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Definisi 2.3

Misalkan $f:[-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$. Perluasan periodik f (dengan periode 2π) dari f ke $\mathbb{R}$ diperoleh dengan mendefinisikan $f(x) = f(x - 2k\pi)$, dimana $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $x - 2k\pi \in [-\pi,\pi)$.

Definisi 2.4

Misalkan $f \in \Re[0,\pi]$. Deret sinus Fourier dari f diberikan oleh$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, dimana $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, n = 1, 2, \dots$ adalah koefisien sinus Fourier dari f. Dengan cara yang sama, deret cosinus Fourier dari $f \in \Re[0,\pi]$ diberikan oleh

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

dimana$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ dan $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $n = 1, 2, \dots$ adalah koefisien cosinus Fourier dari f.

Teorema 2.3

Misalkan $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ adalah barisan dari bilangan real yang memenuhi

a) Jumlahan parsial $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ membentuk barisan terbatas,
b) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq 0$, dan
c) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergen.

Teorema 2.4

Misalkan $\{b_k\}$ adalah barisan dari bilangan real yang memenuhi$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq 0$ dan $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.Maka

a) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$ konvergen untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, dan
b) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kt$ konvergen untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, kecuali pada $t = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.5

Deret yang berbentuk $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$,dimana A_n dan B_n adalah bilangan real disebut deret trigonometri.

Teorema 2.5

Jika deret trigonometri $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$konvergen seragam pada $[-\pi,\pi]$, maka deret tersebut adalah deret Fourier dari fungsi bernilai real yang kontinu pada $[-\pi,\pi]$.

Teorema 2.6

Misalkan $f_n \in \Re[a,b]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan misalkan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$. Maka $f \in \Re[a,b]$ dan $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Teorema 2.7

Jika f periodik dengan periode p dan terintegralkan Riemann pada $[0,p]$, maka f terintegralkan Riemann pada $[a,a+p]$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, dan $\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$.

Definisi 2.6

Barisan $\{Q_n\}$ dari fungsi non negatif yang terintegralkan Riemann pada $[-a,a]$ yang memenuhi

a) $\int_{-a}^{a} Q_n(t)\,dt = 1$, *dan*

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\int_{\{\delta\leq|t|\}} Q_n(t)\,dt = 0, \quad \forall\delta > 0,$$

disebut identitas aproksimasi pada $[-a,a]$.

Teorema 2.8

Misalkan $\{Q_n\}$ sifat aproksimasi pada $[-1,1]$, dan misalkan f fungsi periodik pada periode 2 bernilai real yang terbatas di $\mathbb{R}$ dengan $f \in \Re[-1,1]$.
Untuk $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan$S_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt$.
Jika f kontinu di $x \in \mathbb{R}$, maka$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$.
Selanjutnya, jika f kontinu pada $[-1,1]$, maka$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ seragam pada $\mathbb{R}$.

3. Hasil dan Pembahasan

Aproksimasi Weierstrass adalah suatu bentuk aproksimasi terhadap suatu fungsi kontinu pada suatu interval tutup oleh suatu fungsi polinomial.

Teorema 3.1

Jika$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ kontinu, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat polinomial $P(x)$, sedemikian sehingga $|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$.

Pada teorema yang diberikan oleh Fejer, diberikan secara eksplisit versi trigonometri dari teorema Weierstrass. Fungsi-fungsi yang memegang peranan penting dalam pembuktian teorema Fejer adalah fungsi yang dikenal sebagai Kernel Fejer yang merupakan suatu fungsi yang dibangun dari Dirichlet Kernel.

Misalkan f adalah suatu fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $[-\pi,\pi]$ dan f diperluas pada domain $\mathbb{R}$ dimana f periodik dengan periode 2π. Selanjutnya diasumsikan bahwa $f \in \Re[-\pi,\pi]$.

Teorema 3.2

Misalkan $f \in \Re[-\pi,\pi]$. Maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt$,dimana D_n adalah Dirichlet kernel diberikan oleh

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, & t \neq 2p\pi,\ \ p \in \mathbb{Z} \\ n + \frac{1}{2}, & t = 2p\pi. \end{cases}$$

Bukti :

Berdasarkan definisi koefisien-koefisien Fourier a_k dan b_k, diperoleh

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right]dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Misalkan $D_n(s) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ks$, maka dengan menggunakan persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Selanjutnya, sisa mengambil fungsi $D_n(s)$.

- Untuk $s = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$D_n(2p\pi) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = n + \tfrac{1}{2}.$$

- Untuk $s = 2p\pi$, dengan identitas dari Teorema 2.5, diperoleh

$$D_n(s) = \tfrac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s - \sin\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2\sin\frac{s}{2}}.$$

■

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika $f \in \Re[-\pi,\pi]$ maka barisan $\{S_n\}$ akan konvergen ke suatu fungsi f pada $[-\pi,\pi]$. Untuk membuktikan kekonvergenan dalam rata-rata dari deret Fourier, didefinisikan rata-rata aritmetika dari jumlahan parsial S_n. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}. \qquad (2)$$

Teorema 3.3

Jika limit dari $\{S_n\}$ *ada, maka* $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$.

Bukti :

Misalkan barisan $\{S_n\}$ konvergen ke S, sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.
Selanjutnya, terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq \mathbb{N}$,

$$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Persamaan (2) dapat dituliskan

$$S - \sigma_n = \frac{(n+1)S}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k. \qquad (3)$$

Misalkan $n \geq \mathbb{N}$. Dengan manipulasi aljabar, persamaan (3) dapat dituliskan

$$S - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\mathbb{N}}(S - S_k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\mathbb{N}+1}^{n}(S - S_k).$$

Dengan mengaplikasikan ketidaksamaan segitiga pada kedua penjumlahan dan karena $\mathbb{N} + 1 \geq 1$, maka penjumlahan sisi kanan lebih kecil dari $(n+1)\frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga diperoleh

$$|S - \sigma_n| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\mathbb{N}}(S - S_k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\mathbb{N}+1}^{n}(S - S_k)\right|$$
$$< \frac{1}{n+1}(\mathbb{N}+1)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

karena $\mathbb{N}$ konstan dan misalkan n semakin besar hingga penjumlahan sisi kiri lebih kecil dari $\frac{\varepsilon}{2}$, diperoleh

$$|S - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq \mathbb{N}$. Jadi, σ_n konvergen ke S.

■

Lemma 3.1

Untuk $n \in \mathbb{N}$, *misalkan*

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Maka

$a)$ $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{j}{n+1}\right)\left(a_j \cos jx + b_j \sin jx\right)$

dan

$$b)\quad \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2\, dx.$$

Teorema 3.4

Misalkan $f \in \Re[-\pi,\pi]$. *Maka untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dan* $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t)\, dt,$$

dimana F_n *adalah kernel Fejer, diberikan oleh*

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)} \left[\dfrac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right]^2, & t \neq 2p\pi, \\ \dfrac{n+1}{2}, & t = 2p\pi. \end{cases}$$

Bukti:

Dengan Teorema 3.2,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(x-s)\, ds,$$

dimana D_n adalah Dirichlet Kernel. Oleh karena itu,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) F_n(x-s)\, ds,$$

dimana

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Jika $t = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, maka $D_k(2p\pi) = k + \frac{1}{2}$, dan jadi

$$F_n(2p\pi) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(n+1)}{2}.$$

Jika $t \neq 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t \\ &= \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sin\frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t. \end{aligned}$$

Dengan sifat $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(B-A) - \cos(B+A)]$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sin\frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (\cos kt - \cos(k+1)t) \\ &= \sin^2 (n+1)\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, untuk $t \neq 2p\pi$,

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2.$$

■

Teorema 3.5

a) F_n *periodik pada periode* 2π *dengan* $F_n(-t) = F_n(t)$.
b) $F_n(t) \geq 0$ *untuk setiap* t.
c) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$.
d) *Untuk* $0 < \delta < \pi$, $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0$ *seragam untuk setiap* t, $\delta \leq |t| \leq \pi$.

Bukti :

a) Diketahui $F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2$. Karena

$$\sin\left(\frac{(n+1)}{2}(t+2\pi)\right) = (-1)^{n+1}\sin(n+1)\frac{t}{2},$$

dan

$$\sin\frac{1}{2}(t+2\pi) = -\sin\frac{t}{2},$$

subtitusikan hasil ini ke F_n diperoleh

$$F_n(t+2\pi) = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t+2\pi}{2}}{\sin\frac{t+2\pi}{2}}\right]^2$$
$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2$$
$$= F_n(t).$$

Selanjutnya,

$$F_n(-t) = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{(-t)}{2}}{\sin\frac{(-t)}{2}}\right]^2$$
$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2$$
$$= F_n(t),$$

diperoleh $F_n(-t) = F_n(t)$.
Oleh karena itu, F_n periodik dengan periode 2π.

b) Karena $\frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 \geq 0$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka $F_n(t) \geq 0$ untuk semua nilai t.

c) Karena $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = 1$, diperoleh

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = 1.$$

d) Karena $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ untuk semua t dan $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$ dan

$$-1 \leq \sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right) \leq 1$$
$$\left|\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)\right| \leq 1, \qquad untuk\ \forall t$$

diperoleh

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2$$
$$\leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

untuk semua nilai t, dan $\delta \leq |t| \leq \pi$. Untuk setiap δ, dimana $0 < \delta < \pi$, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} = 0.$$

Karena $F_n(t) \geq 0$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) \geq \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Oleh karena itu, $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0$ secara seragam pada $\delta \leq |t| \leq \pi$.

■

Teorema 3.6

Jika f adalah fungsi bernilai real pada $[-\pi,\pi]$ dengan $f(-\pi) = f(\pi)$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

seragam pada $[-\pi,\pi]$.

Bukti :

Diketahui f adalah fungsi yang bernilai real pada $\mathbb{R}$ yang periodik dengan periode 2π, dari Teorema 3.4,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(x-t)\,dt.$$

Dengan mengubah variabel $t - x = s$ diperoleh

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)F_n(s)\,ds.$$

Karena fungsi yang memetakan $s \to f(s+x)F_n(s)$ periodik dengan periode 2π, diperoleh

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)F_n(s)\,ds.$$

Selanjutnya, karena f kontinu pada $[-\pi,\pi]$ dengan $f(-\pi) = f(\pi)$, maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

seragam pada $[-\pi,\pi]$.

■

Akan ditunjukkan bahwa teorema aproksimasi Weierstrass versi trigonometri dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema Fejer sebagai berikut

Teorema 3.7

Misalkan f *kontinu pada* $[-\pi,\pi]$ *dengan* $f(-\pi)=f(\pi)$. *Untuk setiap* $\varepsilon>0$, *terdapat polinomial trigonometri*

$$T_n(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

sedemikian sehingga

$$|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$$

untuk setiap $x\in[-\pi,\pi]$.

Bukti:

Misalkan f kontinu pada $[-\pi,\pi]$ dengan $f(-\pi)=f(\pi)$. Diketahui bahwa $\sigma_n(x)$ adalah rata-rata jumlahan parsial dari deret trigonometri dan deret tersebut juga merupakan fungsi polinomial trigonometri, dimana

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\left(a_j\cos jx+b_j\sin jx\right)$$

sehingga $T_n(x)\sim\sigma_n(x)$. Dari teorema Fejer diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x)$$

konvergen seragam pada $[-\pi,\pi]$, yang berarti $\sigma_n(x)$ konvergen seragam ke $f(x)$. Berdasarkan definisi konvergen seragam, diperoleh

$$|f(x)-T_n(x)|=|f(x)-\sigma_n(x)|<\varepsilon$$

untuk setiap $\varepsilon>0$.

■

4. Penutup

Berdasarkan hasil yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa teorema aproksimasi Weierstrass dapat dibuktikan dengan teorema Fejer, yaitu

Misalkan f kontinu pada $[-\pi,\pi]$ dengan $f(-\pi)=f(\pi)$. Untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat polinomial trigonometri (yang diperoleh dari teorema Fejer)

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\left(a_j\,cos\,jx+b_j\,sin\,jx\right)$$

dan

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x)$$

seragam pada $[-\pi,\pi]$, sedemikian sehingga

$$|f(x)-\sigma_n(x)|<\varepsilon$$

untuk setiap $x\in[-\pi,\pi]$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Manfred Stoll, 1997, *Introduction to Real Analysis,* Addison-Wesley, Amerika Serikat.

[2] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, 2000, *Introduction to Real Analysis third edition*, John Wiley & Sons, New York.

[3] Robert Wrede dan Murray R. Spiegel, 2007, *Schaum's Outlines Teori dan Soal-soal*

Kalkulus Lanjut, Erlangga, Jakarta.

[4] William Ted Martin, E. H. Spanier, G. Springer and P. J. Davis, 1976, *Principles of Mathematical Analysis third edition*, McGraw-Hill, Inc., New York.

[5] Dilcia P´erez, Yamilet Quintana, 2008, A survey on the Weierstrass approximation theorem, *Divulgaciones Matem´aticas*, Vol. 16 No. 1, pp. 231–247