ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 7, No.1, 39-48, Juli 2010

Penaksiran Parameter Regresi Nonlinier dengan Algoritma Gauss-Newton dan Tafsiran Geometris Least Squares

M. Saleh AF*

Abstrak

Algoritma Gauss-Newton atau disebut juga metode linierisasi adalah suatu prosedur iterasi yang digunakan untuk memecahkan masalah kuadrat terkecil (*least-squre*) pada fungsi jumlah kuadrat untuk meminimumkan suatu fungsi obyektif dengan syarat orde pertama (*first orde condition*). Dalam tulisan ini akan dibahas secara teoritis penaksiran parameter regresi nonlinier menggunakan algoritma Gauss-Newton (GN) yang akan memecahkan masalah *unconstrained least-squares*. Pembahasan toritis dan implementasinya memanfaatkan model fungsi nonlinier kontinu $f(\theta)$ yang tergantung pada vektor parameter θ berdimensi p, fungsi residual $r(\theta)$, matriks turunan parsial D berukuran $n \times p$, Jacobian dari fungsi residu $J(\theta)$ dan nilai awal $\theta^{(0)}$, serta vektor koefisien regresi yang merupakan taksiran least-square $\delta^{(0)}$ tanpa intercept. Algoritma GN dimulai dengan ekspansi linier deret Taylor orde pertama untuk aproksimasi terhadap fungsi $f_i(\theta)$ disekitar nilai awal $\theta^{(0)}$, yaitu $f_i(\theta) \approx f_i\left(\theta^{(0)}\right) + \frac{\partial f_i(\theta^{(0)})}{\partial \theta'}\left(\theta - \theta^{(0)}\right)$. Fungsi aproksimasi tersebut dimanfaatkan untuk memperoleh solusi dari minimisasi masalah kuadrat terkecil linier: $minimize_\theta \left\| r^{(0)} - D^{(0)}\left(\theta - \theta^{(0)}\right)\right\|^2$, sehingga diperoleh algoritma Gauss Newton:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \delta^{(k)}, \text{ dengan } \delta^{(k)} = -\left(J^{(k)\prime} J^{(k)}\right)^{-1} J^{(k)\prime} r^{(k)}.$$

Dalam praktek, bentuk $J'J$ sangat sulit diperoleh, sehingga $\delta^{(k)}$ dapat diperoleh melalui penyelesaian *linier least squares* yaitu $minimize_\delta \left\| r^{(k)} + J^{(k)}\delta \right\|^2$.

Kata Kunci: *Algoritma Gauss-Newton, model regresi nonlinear, nonlinear Least-Squares.*

1. Pendahuluan

Penaksiran parameter pada sebagian masalah nonlinier seringkali dilakukan dengan cara memecahkan persamaan normal (*solution of Normal Equation*), namun cara ini seringkali menimbulkan kesulitan dalam pemecahannya, bahkan terkadang tidak tercapai solusi analitik sebagaimana yang diharapkan (Kutner *et al.*, 2004). Kenyataan ini mengharuskan ditempuh metode iteratif untuk menaksir parameter regresi nonlinier. Seber dan Wild (1989) menuliskan beberapa metode iteratif antara lain metode Gauss-Newton, metode Levenberg-Marquardt, metode Powell's Hybrid, dan lain-lain. Algoritma Gauss-Newton merupakan modifikasi dari metode Newton untuk mengoptimalkan suatu fungsi obyektif, yaitu meminimumkan fungsi jumlah kuadrat (*sum of squares function*). Algoritma Gauss-Newton merupakan prosedur iterasi dan hanya dapat digunakan untuk meminimumkan fungsi jumlah kuadrat $S(\theta)$. Prosedur iterasi

* *Program Studi Statistika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*

mengharuskan ditetapkannya taksiran sebuah nilai awal (*initial or starting value*) yang dinotasikan $\theta^{(0)}$ untuk vektor parameter regresi nonlinier θ berdimensi p. Algoritma Gauss-Newton dimulai dengan ekspansi deret Taylor linier (orde pertama) untuk melakukan aproksimasi terhadap fungsi regresi $f_i(\theta)$ di sekitar nilai awal $\theta^{(0)}$, yaitu $f_i(\theta) \approx f_i(\theta^{(0)}) + \frac{\partial f_i(\theta^{(0)})}{\partial \theta'}(\theta - \theta^{(0)})$, yang akan mengantar pada minimisasi linear *least-square problem*:

$$Minimize_{\theta} \left\| Y - f(\theta^{(0)}) - \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta'}\Big|_{\theta^{(0)}} (\theta - \theta^{(0)}) \right\|^2$$

dan pada akhirnya mengantar pada algoritma Gauss-Newton (GN): $\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \delta^{(k)}$, $\delta^{(k)} = \left(D^{(0)\prime} D^{(0)}\right)^{-1} D^{(0)\prime} r^{(a)}$, dengan $r^{(a)} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta'}\Big|_{\theta^{(0)}}$ dan D adalah matriks turunan parsial berukuran $n \times p$. Tetapi bentuk terakhir tersebut masih diluar konteks nonlinier least squares regression, sehingga analisis numerik dengan melibatkan gradien dan Hessian lebih menarik sebagai pilihan, sehingga diperoleh $\delta^{(k)} = -\left(J^{(k)\prime} J^{(k)}\right)^{-1} J^{(k)\prime} r^{(k)}$ atau $minimize_{\delta} \left\| r^{(k)} + J^{(k)} \delta \right\|^2$.

2. Penaksiran Kuadrat Terkecil

2.1. Kuadrat Terkecil Nonlinier (*Nonlinear Least-Squares*)

Jika terdapat n pasangan observasi (X_i, Y_i), $i = 1,2,\cdots,n$ dari model *fixed-regressor* nonlinier dengan hubungan fungsional f nonlinier, maka bentuk umum model regresi nonlinier dinyatakan sebagai:

$$Y_i = f(X_i, \theta) + \varepsilon_i\ ,\ \ (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

dimana $E(\varepsilon_i) = 0$, X_i adalah vektor berukuran $(k \times 1)$, dan vektor parameter θ berukuran $(r \times 1)$, $\theta \in \Theta \subseteq \Re^p$. Penaksir least squares untuk parameter θ dinotasikan dengan $\hat{\theta}$ yang meminimumkan "Jumlah Kuadrat Galat " (*error sum of squares*)

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} [Y_i - f(X_i, \theta)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [r_i(\theta)]^2 \\ &= [Y - f(X_i, \theta)]'[Y - f(X_i, \theta] \\ &= \|Y - f\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Bila setiap $f(X_i, \theta)$ terdiferensiabel terhadap θ dan $\hat{\theta} \in \Theta$, maka $\hat{\theta}$ memenuhi

$$\frac{\partial \boldsymbol{S(\theta)}}{\partial \theta_r}\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0,\ \ (r = 0,1,\cdots,p-1) \tag{3.a}$$

$$2 \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left\{ Y_{\boldsymbol{i}} - f(\boldsymbol{X_i}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_r}\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left\{ Y_i - f(X_i, \hat{\theta}) \right\} \frac{\partial f(X_i, \theta)}{\partial \theta_r}\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \tag{3.b}$$

Dalam bentuk matriks, persamaan (3.b) dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} D'(\hat{\theta})\{(Y - f(\hat{\theta})\} &= 0 \\ D'(\hat{\theta})\ \hat{\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

dimana

$$f(\theta) = \big(f_i(\theta), f_2(\theta), \cdots, f_n(\theta)\big)' \qquad (5.a)$$
$$f_i(\theta) = f(X_i, \theta) \qquad (5.b)$$
$$D(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta'} = \left[\left(\frac{\partial f_i(\theta)}{\partial \theta_r}\right)\right] \qquad (5.c)$$
$$D_{ir} = \frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_r} \qquad (5.d)$$

dengan $D(\theta)$ adalah matriks turunan parsial berukuran $(n \times p)$. Persamaan (3.b) dan (4) disebut persamaan normal model regresi nonlinier. Dalam kebanyakan model nonlinier, persamaan normal ini tidak dapat diselsaikan secara analitik atau secara langsung, sehingga metode iteratif menjadi pilihan, yang salah satunya akan dibahas berikut.

2.2. Algoritma Gauss-Newton

Metode Gauss-Newton, dimulai dengan sebuah nilai awal (*initial or starting value*) untuk paramater $\theta = [\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_{p-1}]'$ yang dinotasikan dengan

$$\theta^{(0)} = \left[\theta_0^{(0)}, \theta_1^{(0)}, \cdots, \theta_{p-1}^{(0)}\right]'.$$

Nilai-nilai awal $\theta_r^{(0)}$ mungkin saja merupakan dugaan kasar, atau dugaan yang berdasarkan informasi yang tersedia (misalnya perkiraan berdasarkan informasi awal yang diperoleh, atau dari perhitungan yang diperkirakan benar oleh peneliti berdasarkan *trial* dan *error*. Misalkan $\theta^{(0)}$ adalah sebuah aproksimasi pada penduga model nonlinier dengan least squares $\hat{\theta}$. Dan misalkan pula θ dekat (*small neighborhood*) pada $\theta^{(0)}$, maka ekspansi deret Taylor orde pertama untuk mean respon $f(X_i, \theta)$ adalah

$$f(X_i, \theta) \approx f\big(X_i, \theta^{(0)}\big) + \sum_{r=0}^{p-1} \frac{\partial f(X_i, \theta)}{\partial \theta_r}\bigg|_{\theta=\theta^{(0)}} \left(\theta_r - \theta_r^{(0)}\right) \qquad (6.a)$$

atau

$$f_i(\theta) \approx f_i\big(\theta^{(0)}\big) + \sum_{r=0}^{p-1} D_{ir}^{(0)}\ \delta_r^{(0)} \qquad (6.b)$$

dimana

$$D_{ir}^{(0)} = \frac{\partial f(X_i, \theta)}{\partial \theta_r}\bigg|_{\theta=\theta^{(0)}} \qquad (6.c)$$

dan $\delta_r^{(0)} = \theta_r - \theta_r^{(0)}$. (6.d)

Sehingga aproksimasi model regresi nonlinier (1) adalah:

$$Y_i \approx f_i\big(\theta^{(0)}\big) + \sum_{r=0}^{p-1} D_{ir}^{(0)}\ \delta_r^{(0)} + \varepsilon_i \qquad (7)$$
$$Y_i - f_i\big(\theta^{(0)}\big) \approx \sum_{r=0}^{p-1} D_{ir}^{(0)}\ \delta_r^{(0)} + \varepsilon_i\ .$$

Dengan menuliskan suku ruas kiri $Y_i - f_i\big(\theta^{(0)}\big)$ sebagai $Y_i^{(0)}$, diperoleh model aproksimasi linier:

$$Y_i^{(0)} \approx \sum_{r=0}^{p-1} D_{ir}^{(0)}\ \delta_r^{(0)} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2, \cdots, n\ . \qquad (8)$$

Dalam bentuk matriks, model aproksimasi linier (8), dapat dituliskan sebagai:

$$Y^{(0)} \approx D^{(0)}\delta^{(0)} + \varepsilon \tag{9}$$

dimana

$$\underbrace{Y^{(0)}}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1\left(\theta^{(0)}\right) \\ \vdots \\ Y_n - f_n\left(\theta^{(0)}\right) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{D^{(0)}}_{n\times p} = \begin{bmatrix} D_{10}^{(0)} & \cdots & D_{1,p-1}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n0}^{(0)} & \cdots & D_{n,p-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{r\times 1}{\delta^{(0)}} = \begin{bmatrix} \delta_0^{(0)} \\ \vdots \\ \delta_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 - \theta_0^{(0)} \\ \vdots \\ \theta_{p-1} - \theta_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times 1}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Matriks turunan parsial *D* pada model aproksimasi linier (9) sekarang memegang peranan penting terhadap matriks regressor *X* (tetapi tanpa kolom pertama untuk intersep). Selanjutnya dapat dilakukan penaksiran vektor parameter $\delta^{(0)}$ pada persamaan (10) melalui OLS diperoleh

$$\delta^{(0)} = \left(D^{(0)\prime}D^{(0)}\right)^{-1} D^{(0)\prime}Y^{(0)}. \tag{11}$$

Dengan demikian vektor $\delta^{(0)}$ akan meminimumkan jumlah kuadrat

$$JK(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - f\left(\theta^{(0)}\right) - \sum_{r=0}^{p-1} D_{ir}^{(0)}\delta_r^{(0)}\right]^2. \tag{12}$$

Dengan program komputer dapat diperoleh penaksir $b_r^{(0)}$ dengan spesifikasi tanpa intersep (*Kutner et al*., 2004). Dengan menggunakan hasil penaksir least squares $\delta_r^{(0)}$, diperoleh penaksir koefisien regresi $\theta_r^{(1)}$ melalui mean dari (6.d):

$$\theta_r^{(1)} = \theta_r^{(0)} + \delta_r^{(0)} \tag{13}$$

dimana $\theta_r^{(1)}$ adalah penaksir θ_r yang direvisi pada akhir iterasi pertama. Dalam bentuk matriks, proses revisi dituliskan sebagai:

$$\theta^{(1)} = \theta^{(0)} + \delta^{(0)} \tag{14}$$

Selanjutnya penaksir $\theta^{(k)}$ untuk vektor parameter yang dihasilkan oleh proses pengulangan iterasi melalui hubungan:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \delta^{(k)}\ , \quad k = 0,1,\cdots \tag{15.a}$$

Secara umum algoritma Gauss-Newton dituliskan sebagai

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \delta^{(k)} \tag{15.b}$$

dengan $$\delta^{(k)} = \left(D^{(k)\prime} D^{(k)}\right)^{-1} D^{(k)\prime} r^{(k)}. \tag{15.c}$$

Perlu dicatat bahwa kriteria least squares $S(\theta)$ pada persamaan (2) digunakan untuk mengevaluasi nilai awal koefisien regresi $\theta^{(0)}$ melalui $SSE^{(0)}$, yaitu

$$SSE^{(0)} = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - f\left(X_i, \theta^{(0)}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - f_i^{(0)}\right)^2. \tag{16}$$

Pada akhir iterasi pertama, penaksir koefisien regresi yang telah direvisi adalah $\theta^{(1)}$ dan kriteria least squares mengevaluasi tahapan ini, yang sekarang dinotasikan sebagai $SSE^{(1)}$, yaitu

$$SSE^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - f\left(X_i, \theta^{(1)}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - f_i^{(1)}\right)^2. \tag{17}$$

Jika metode Gauss-Newton bekerja efektif pada iterasi pertama, $SSE^{(1)}$ akan lebih kecil dari $SSE^{(0)}$, dan penaksir koefisien regresi yang telah direvisi $\theta^{(1)}$ akan menjadi penaksir yang lebih baik dari yang sebelumnya.

Proses iteratif ini dilanjutkan sampai diperoleh solusi konvergen, dengan kata lain sampai pada langkah iterasi k dan $(k+1)$ berlaku

$$\left|\frac{\theta_r^{(k+1)} - \theta_r^{(k)}}{\theta_r^{(k)}}\right| < \tau \ \ , \ r = 0,1,\cdots,p-1\,, \tag{18}$$

dimana τ bilangan positif yang telah ditetapkan sebelumnya (misalnya $\tau = 0.000001$). Pada setiap iterasi sebaiknya $SSE^{(k)}$ dihitung untuk melihat apakah terjadi penurunan nilai. Bila gradien dan Hessian dari $S(\theta)$ berturut-turut dinyatakan sebagai berikut:

Gradien: $$\begin{aligned} g(\theta) = \nabla S(\theta) &= \frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta\prime} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} r_i(\theta)\frac{\partial r_i(\theta)}{\partial \theta} \ = 2\,J'(\theta)\,r, \end{aligned} \tag{19}$$

dimana Jacobian $$J(\theta) = \left[\left(\frac{\partial r_i}{\partial \theta_j}\right)\right] = \frac{\partial r}{\partial \theta\prime} = -D(\theta)\,, \tag{20}$$

merupakan matriks berukuran $n \times p$ dengan kolom ke-j adalah $\frac{\partial r}{\partial \theta_j}$.

Dan Hessian: $$\begin{aligned} H(\theta) &= \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta\, \partial \theta\prime} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r_i(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial r_i(\theta)}{\partial \theta\prime} + 2\sum_{i=1}^{n} r_i(\theta)\,\frac{\partial^2 r_i(\theta)}{\partial \theta\,\partial \theta\prime} \\ &= 2\{J'J + A(\theta)\} \end{aligned} \tag{21}$$

dimana $A(\theta) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\theta)\,\frac{\partial^2 r_i(\theta)}{\partial \theta\,\partial \theta\prime}$ dan $H(\theta)$ adalah matriks Hessiaan berukuran $p \times p$.
Jadi langkah Newton adalah

N: $$\delta^{(0)} = -\left(H^{(0)}\right)^{-1} g^{(0)} = -\left(J^{(0)\prime} J^{(0)} + A^{(0)}\right)^{-1} J^{(0)\prime} r^{(0)}. \tag{22}$$

Karena $J^{(0)} = -D^{(0)}$, maka $D^{(0)\prime}D^{(0)} = J^{(0)\prime}J^{(0)}$, sehingga (15.c) menjadi

GN: $$\delta^{(0)} = -\left(J^{(0)\prime}J^{(0)}\right)^{-1}J^{(0)\prime}r^{(0)} \quad (23)$$

Jadi algoritma Gauss-Newton diperoleh dari algoritma Newton (N) dengan mengabaikan bagian Hessian $A(\theta)$ dari persamaan (21). Dalam prakteknya, suku $J'J$ tidak pernah diperoleh, sehingga $\delta^{(0)}$ diperoleh melalui pemecahan/penyelesaian linier least squares, yaitu

$$minimize_{\delta}\left\|r^{(0)} + J^{(0)}\delta\right\|^2 , \quad (24)$$

menggunakan metode kestabilan numeric (*numerically stable*) yang didasarkan pada penggunaan faktorisasi dari $J^{(0)}$. Faktorisasi tersebut dapat berbentuk faktorisasi orthogonal (QR) atau dekomposisi nilai singular.

3. Contoh Penerapan

Rumah sakit ingin mengembangkan sebuah model regresi untuk memprediksi derajat kesembuhan pasien (the degree of long-term recovery) setelah menjalani perawatan di rumah sakit (after discharge from the hospital). Variabel prediktornya adalah jumlah hari perawatan di rumah sakit (*X*), dan variabel respon adalah indeks prognostic for long-term recovery (*Y*). Data diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Data Pasien.

X_i	2	5	7	10	14	19	26	31	34	38	45	52	53	60	65
Y_i	54	50	45	37	35	25	20	16	18	13	8	11	8	4	6

Sumber: *Kutner et al. (2004).*

Model yang dihipotesiskan berbentuk:

$$Y = \gamma_0\, exp(\gamma_1 X) + \varepsilon \quad (25)$$

dengan fungsi respon $f(X,\theta) = \gamma_0\, exp(\gamma_1 X)$ yang dapat dilinierisasi melalui transformasi logaritma natural:

$$ln[\gamma_0\, exp(\gamma_1 X)] = ln(\gamma_0) + \gamma_1 X, \quad (26)$$

sehingga model regresi linier dengan transformasi variabel Y yang akan difitkan (*fitted*) dengan nilai awal untuk suatu penghampiran (aproksimasi) model eksponensial, adalah

$$Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad (27)$$

dimana $Y_i^* = ln(Y_i)$, $\beta_0 = ln(\gamma_0)$, $\beta_1 = \gamma_1$. Dengan menerapkan metode Kuadrat Terkecil (*Least Squares*), diperoleh taksiran koefisien regresi linier, yaitu $\hat{\beta}_0 = \delta_0 = 4.03716$ dan $\hat{\beta}_1 = \delta_1 = -0.03797$, sebagaimana yang diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. ANAVA.

	Koefisien	Standard Error	Stat-*t*
Intersep	4.037158866	0.084103145	48.0024718
Variabel *X*	-0.037974181	0.002284209	-16.624655

Dengan demikian, dugaan nilai awal (*initial starting value*) untuk iterasi adalah

$$\hat{\theta}^{(0)} = \begin{cases} \hat{\theta}_0^{(0)} = exp(\delta_0) = exp(4.03716) = 56.66513 \\ \hat{\theta}_1^{(0)} = \delta_1 = -0.03797 \end{cases}$$

Nilai-nilai awal parameter $\hat{\theta}_0^{(0)}$ dan $\hat{\theta}_1^{(0)}$ ini diterapkan pada setiap pengamatan. Untuk pengamatan pertama, $X_1 = 2;\ \ Y_1 = 54$, diperoleh $f\left(X_1, \hat{\theta}^{(0)}\right) = f_1^{(0)} = \hat{\theta}_0^{(0)}\, exp\left(\hat{\theta}_1^{(0)} X_1\right) = 56.66513\, exp(-0.03797 * 2) = 52.52131$, dan deviasi mean respon adalah

$$Y_1^{(0)} = Y_1 - f_1^{(0)} = 54 - 52.52131 = 1.47911.$$

Turunan parsial fungsi respon (26) terhadap parameternya adalah

$$\frac{\partial f(X_i,\theta)}{\partial \gamma_0} = exp(\gamma_1 X) \text{ dan } \frac{\partial f(X_i,\theta)}{\partial \gamma_1} = \gamma_0 X\, exp(\gamma_1 X),$$

sehingga

$$D_{10}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(X_1,\theta)}{\partial \gamma_0}\right]_{\theta=\hat{\theta}} exp\left(\hat{\theta}_1^{(0)} X_1\right) = exp(-0.03797 * 2) = 0.92686$$

$$D_{11}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(X_1,\theta)}{\partial \gamma_1}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = \hat{\theta}_0^{(0)} X_1 exp\left(\hat{\theta}_1^{(0)} X_1\right) = 56.66513 * 2 * exp(-0.03797 * 2) = 105.04178 .$$

Selanjutnya, terapkan metode kuadrat terkecil untuk menduga koefisien regresi antar respon $Y^{(0)}$ pada dua variabel *X* dalam matriks $D^{(0)}$ tanpa intersep, dan diperoleh hasil dalam Tabel 3.

Tabel 3. Kofisien Regresi Linier Tanpa Intersep.

	Koefisien	*Standard Error*
Intersep	0	**#N/A**
Variabel D_0(0)	1.892878164	1.448095231
Variabel D_1(0)	-0.001559049	0.001681719

Sehingga vektor penduga koefisien regresi $\delta^{(0)}$ tanpa intersep adalah

$$\delta^{(0)} = \begin{bmatrix} \delta_0^{(0)} \\ \delta_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.89288 \\ -0.00156 \end{bmatrix}$$

Dengan persamaan (14) diperoleh penduga parameter yang direvisi,

$$\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\theta}^{(0)} + \delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 56.66513 \\ -0.03797 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.89288 \\ -0.00156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.55801 \\ -0.039533 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, $\hat{\theta}_0^{(1)} = 58.55801$ dan $\hat{\theta}_1^{(1)} = -0.039533$ merupakan taksiran parameter yang sudah direvisi pada iterasi pertama. Revisi residual dari fungsi regresi eksponensial dan turunan parsial pertama, didasarkan pada penduga parameter yang sudah direvisi di atas. Untuk pengamatan 1, dengan $Y_1 = 54$ dan $X_1 = 2$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
Y_1^{(1)} &= Y_1 - f_1^{(1)} = 54 - 58.55801 * exp(-0.039533 * 2) = -0.10636. \\
D_{10}^{(1)} &= exp\left(\hat{\theta}_1^{(1)} X_1\right) = exp(-0.039533 * 2) = 0.92398. \\
D_{11}^{(1)} &= \hat{\theta}_0^{(1)} X_1 exp\left(\hat{\theta}_1^{(1)} X_1\right) = 58.55801 * 2 * exp(-0.039533 * 2) \\
&= 108.21273.
\end{aligned}
$$

Hasil selengkapnya ditunjukkan dalam Tabel 4. Selanjutnya, regresikan $Y^{(1)}$ dan $D^{(1)}$ untuk mendapatkan penduga koefisien regresi $\delta^{(1)}$, diperoleh hasil dalam Tabel 5.

Tabel 4. Koefisien regresi (tanpa intercept).

	Koefisien	***Standard Error***
Intersep	0	#N/A
Variabel D_0(0)	0.047482676	1.471306632
Variabel D_1(0)	-5.1696E-05	0.001709776

Jadi $\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.047483 \\ -5.1696E(-05) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.047483 \\ -0.0000517 \end{bmatrix}$,

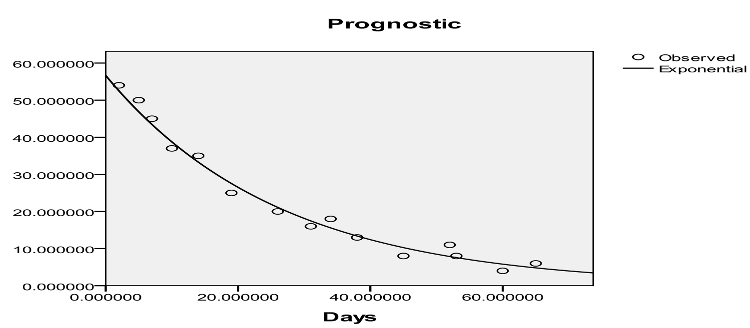
sehingga

$$\hat{\theta}^{(2)} = \hat{\theta}^{(1)} + \delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 58.55801 \\ -0.039533 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.047483 \\ -0.0000517 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.60549 \\ -0.039585 \end{bmatrix}$$

Proses dilanjutkan, hingga tercapai kestabilan solusi. Hasil setelah iterasi ke-5 ditunjukkan dalam Tabel 6. Setelah iterasi ke-5, solusi mencapai konvergen, sehingga diperoleh taksiran parameter regresi nonlinier:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.60656 \\ -0.039586 \end{bmatrix}$$

Jadi persamaan regresi nonlinier adalah $Y = 58.60656\, e^{-0.039586\, X}$. Grafik regresi nonlinier dan plot data dapat dilihat dalam Gambar 1.



Gambar 1. Grafik Fungsi Regresi Nonlinier dan Plot Data Observasi.

Tabel 5. Hasil Perhitungan Matriks $Y^{(1)}$ dan $D^{(1)}$.

$\boldsymbol{Y}^{(1)}$	$\boldsymbol{D}^{(1)}$		$\left[\boldsymbol{Y}^{(1)}\right]^2$
	$\boldsymbol{D}_0^{(1)}$	$\boldsymbol{D}_1^{(1)}$	
-0.1063643	0.92397894	108.212729	0.01131336
1.94468138	0.82064472	240.276593	3.78178568
0.59789765	0.75825844	310.814716	0.3574816
-2.4363436	0.67345776	394.363436	5.93577033
1.33173109	0.57495586	471.355765	1.77350769
-2.6296872	0.4718345	524.964057	6.91525487
-0.9504436	0.35777249	544.711533	0.90334296
-1.192871	0.29360411	532.979	1.42294111
2.72991297	0.26076856	519.182959	7.45242483
-0.0366395	0.22262779	495.392302	0.00134246
-1.885142	0.1688094	444.831389	3.55376024
3.50450766	0.12800115	389.765602	12.2815739
0.79504619	0.1230396	381.862552	0.63209845
-1.463217	0.09329582	327.793023	2.14100412
1.51663976	0.07656272	291.418416	2.30019617
			$SSE^{(1)}$ **=49.463798**

Tabel 6. Hasil Lengkap Setelah Iterasi ke-5.

Iterasi	$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{0}}$	$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}$	**SSE**
0	56.66513	-0.037974	56.08294
1	58.55801	-0.039533	49.46380
2	58.60549	-0.039585	49.45930
3	58.60654	-0.039586	49.45930
4	58.60656	-0.039586	49.45930
5	58.60656	-0.039586	49.45930

4. Kesimpulan dan Saran

Beberapa kesimpulan yang dihasilkan dari tulisan ini adalah bahwa penggunaan persamaan normal dalam menaksir parameter model nonlinier sangat sulit prosesnya, dan kebanyakan tidak dapat ditentukan solusi analitiknya. Dalam kasus-kasus tertentu, pada proses linierisasi dengan metode Gauss-Newton, dapat terjadi kekonvergenan yang berjalan lambat, dengan kata lain dibutuhkan sejumlah besar iterasi sebelum solusi mencapai kestabilan/kekonvergena. Bahkan mungkin saja kekonvergenan tidak dapat tercapai, sehingga perlu ditetapkan jumlah maksimum yang iterasi yang harus digunakan pada model.

Daftar Pustaka

Kutner *et al.*, 2004. *Applied Linier Regression Models*. Mc Graw Hill, Printed in Singapore.

Ryan, T.P., 1997. *Modern Regression Method*. John Wiley & Sons, New York.

Draper, N. dan Smith, H., 1992. *Applied Regression Analysis, Second Edition*. John Wiley & Sons Inc., New York..