ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 5, No.2, 58-65, Januari 2009

Suatu Catatan Matematika Model Ekonomi Diamond

Jeffry Kusuma[†]

Abstrak

Model matematika diberikan untuk menjelaskan fenomena dalam dunia ekonomi makro seperti modal/kapital, tenaga kerja, pengetahuan, inovasi dalam riset dan pengembangannya. Ketergantungan elemen elemen dalam ekonomi makro antara satu dengan lainnya diberikan dalam hubungan fungsional sebagaimana dalam model ekonomi Solow yang dikenal luas dalam dunia ekonomi makro.Model Diamond merupakan modifikasi dari model ekonomi Solow yang serba kontinu ke model yang diskrit dengan mengkaji dua lapisan masyarakat.

Kata Kunci : *Model Matematika, model Diamond, Ekonomi Makro.*

1. Pendahuluan

Perbedaan kemakmuran dan standar kehidupan suatu daerah atau negara dengan daerah atau negara lain sering menimbulkan pertanyaan yang sulit dijelaskan. Mengapa suatu daerah atau negara yang satu lebih berkembang dari daerah lainnya? Faktor apa saja yang mempengaruhi perkembangan suatu daerah? Faktor apa saja yang mempengaruhi kemakmuran suatu daerah atau negara? Berapa lamakah waktu yang diperlukan untuk menuju kemakmuran?

Memang tidak dapat dipungkiri bahwa dunia sekarang lebih makmur dari dunia masa lalu. Fenomena ini, tentunya sangat menarik untuk dikaji. Banyak model telah dibuat dalam upaya menerangkan fenomena ini. Ada model yang dapat bertahan, demikian pula banyak model matematika yang hilang dengan sendirinya yang disebabkan dengan ketidaksuaian dengan fenomena yang ada. Diantara segelintir model yang dapat bertahan adalah model Solow yang bertumpu pada empat pilar pertumbuhan yakni hasil produksi (Y), modal/kapital (K), tenaga kerja/labour (L) dan pengetahuan atau efektifitas tenaga kerja (A) yang semuanya merupakan fungsi yang kontinu terhadap waktu.

.

2. Model Solow

Model ekonomi yang dikembangkan Solow bertumpu pada empat pilar pertumbuhan yaitu hasil produksi (Y), modal/kapital (K), tenaga kerja/labour (L) dan pengetahuan atau efektifitas tenaga kerja (A), yang mana keempat pilar ini merupakan fungsi waktu (t) yang memenuhi hubungan fungsional fungsi produksi

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) \text{ atau } Y = F(K, AL)\,. \qquad (1)$$

Di sini terlihat bahwa waktu tidak masuk ke dalam fungsi produksi secara langsung, melainkan melalui K, L dan A. Demikian pula hasil produksi merupakan fungsi modal dan hasil kali A dan L yang dapat dianggap sebagai keefektifan tenaga kerja. Model ini menggunakan asumsi dasar yang

---

[†] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

melibatkan pengembalian yang konstan terhadap kedua variabelnya. Secara umum dapat digambarkan sebagai

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \text{ untuk semua } c \geq 0 . \tag{2}$$

Penggandaan kapital dan tenaga kerja yang efektif akan menggandakan hasil. Sumber daya alam, tanah letak geografis walaupun diketahui penting tidak terlihat pada model.

Asumsi pengembalian yang konstan membuat fungsi produksi dapat dituliskan dalam bentuk

$$F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \frac{1}{AL} F(K, AL) , \tag{3}$$

dimana $c = 1/AL$.

Disini, K/AL merupakan besar kapital per unit tenaga kerja efektif, $F(K, AL)/AL$ atau Y/AL merupakan hasil per unit tenaga kerja efektif.

Bila variabel di atas ditulis ulang dengan $k = K/AL,\ \ y = Y/AL$ dan $f(k) = F(k,1)$, maka fungsi produksi Solow dapat dituliskan dalam bentuk

$$y = f(k) \tag{4}$$

Dari persamaan di atas, dapat dilihat bahwa hasil per unit tenaga kerja efektif hanya merupakan fungsi kapital/modal per unit tenaga kerja efektif. Selanjutnya, fungsi $f(k)$ di atas diasumsikan pula memenuhi sifat $f(0) = 0,\ \ f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$. Di sini terlihat jelas bahwa $f'(k)$ merupakan produk marginal dari modal, karena $F(K, AL) = ALf(K/AL)$, $\partial F(K/AL)/\partial K = ALf'(K/AL)(1/AL) = f'(k)$. Jadi asumsi ini mempunyai arti bahwa marginal produk dari modal adalah positif tetapi akan cenderung menurun bila modal (per unit tenaga kerja efektif) meningkat. Lebih lanjut $f(k)$ diasumsikan memenuhi kondisi Inada, yakni, $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ sebagai mana yang ada dalam fungsi produksi Cobb-Douglas

$$F(K, AL) = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{5}$$

Fungsi ini tetap memenuhi asumsi awal yang berupa pengembalian hasil yang konstan.

Kalikan kedua input dengan konstan c diperoleh

$$\begin{aligned} F(cK, cAL) &= (cK)^{\alpha} (cAL)^{1-\alpha} \\ &= c^{\alpha} c^{1-\alpha} K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha} \\ &= cF(K, AL) \end{aligned} \tag{6}$$

yang menunjukkan dipenuhinya asumsi awal pengembalian konstan. Demikian pula dengan asumsi pemenuhan kondisi Inada. Bila kedua input fungsi produksi dibagi dengan AL diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(k) &\equiv F\left(\frac{K}{AL},1\right) \\
&= \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} \\
&= k^{\alpha}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

yang mempunyai turunan pertama $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$ yang selalu positif dan turunan kedua $f''(k) = -\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2}$ yang selalu negatif.

Asumsi lainnya yang tersisa melibatkan perubahan tenaga kerja, pengetahuan dan modal dari waktu ke waktu. Dalam model Solow ini, perubahan tersebut diasumsikan kontinu dengan laju pertumbuhan

$$\dot{L}(t) = nL(t), \tag{8}$$

$$\dot{A}(t) = gA(t) \tag{9}$$

dimana n dan g merupakan parameter yang menetukan kecepatan pertumbuhan tenaga kerja dan pengetahuan yang tumbuh secara eksponensial. Bila $L(0)$ dan $A(0)$ merupakan keadaan awalnya maka solusi (2.8) dan (2.9) dapat dituliskan sebagai $L(t) = L(0)e^{nt}$ dan $A(t) = A(0)e^{gt}$.

Hasil dibagi antara konsumsi dan tabungan / investasi. Sebagian dari hasil s diinvestasi kembali. Satu unit hasil diberikan sebagai satu unit modal baru. Demikian pula modal/kapital senantiasa terdepresiasi pada laju δ , jadi

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)\,, \tag{10}$$

dengan jumlah nilai n, g dan δ senantiasa bernilai positif.

3. Model Diamond

Model diamond merupakan pengembangkan model Solow. Model ini melibatkan perubahan dalam suatu populasi. Populasi dianggap mempunyai jumlah tetap dimana jumlah individu baru secara kontinu dilahirkan dan individu tua secara kontinu pula meninggal. Setiap individu tenaga kerja diasumsikan hidup dalam 2 periode waktu. L_t disimbolkan untuk tenaga kerja yang ada pada periode t . Sebagaimana sebelumnya, tenaga kerja tumbuh pada laju n ; jadi $L_t = (1+n)L_{t-1}$. Karena setiap individu hidup dalam dua masa periode maka pada waktu t ada sebanyak L_t individu pada periode pertama hidupnya dan $L_{t-1} = L_t/(1+n)$ individu pada periode kedua hidupnya. Setiap individu menyumbangkan satu unit tenaga kerja. Ketika individu masih berusia muda, income dibagi atas konsumsi dan saving (tabungan) pada periode pertama dan pada periode kedua hidupnya, setiap individu hanya mengkonsumsi saving (tabungan) dan bunga tabungan yang diperolehnya.

Bila C_{1t} dan C_{2t} menunjukkan konsumsi pada periode t dari individu muda dan tua, maka utilitas dari individu yang lahir pada t disimbolkan U_t akan bergantung pada C_{1t} dan C_{2t+1}. Jadi dengan pendekatan konstan diperoleh fungsi utilitas

$$U_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta > 0, \quad \rho > -1. \tag{11}$$

Bentuk fungsional fungsi utilitas diatas memerlukan keseimbangan pertumbuhan. Waktu hidup individu terhingga, jadi asumsi $\rho > n + (1-\theta)g$ tidak diperlukan dalam rangka memastikan fungsi utilitas yang tidak divergen. Bila $\rho > 0$, berarti setiap individu menempatkan bobot konsumsi yang lebih besar pada periode pertama dari pada periode kedua. Sebaliknya bila $\rho < 0$ bobot konsumsi lebih besar pada periode kedua dari pada periode pertamanya. Asumsi $\rho > -1$ tetap diperlukan untuk menjamin bobot konsumsi pada periode kedua selalu positif.

Fungsi produksi tetap digambarkan sebagai $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ yang berupa pendapatan tetap dan memenuhi kondisi Inada. Pengetahuan dan ketrampilan tumbuh pada laju g sehingga $A_t = [1+g]A_{t-1}$. Pasar sangat kompetitif sehingga pekerja dan modal memperoleh produk marginalnya. Bila tidak terdapat depresiasi, laju interes dan gaji per unit tenaga kerja efektif diberikan oleh $r_t = f'(k_t)$ dan $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$. Terakhir, ada stok kapital awal K_0 yang dimiliki sama banyaknya oleh semua individu tua.

Jadi, dalam periode 0 kapital yang dimiliki oleh individu tua dan pekerja muda dikombinasikan untuk menghasilkan output. Kapital dan kerja dibayar oleh hasil marginalnya. Individu tua mengkonsumsi pendapatan kapitalnya dan kekayaannya yang ada. Ketika mereka meninggal otomatis keluar dari model. Individu muda membagi pendapatan dari hasil kerjanya $w_t A_t$ kepada konsumsi dan tabungan. Mereka akan membawa tabungannya pada periode berikutnya. Jadi kapital stok pada periode $t+1$ yaitu K_{t+1} bernilai sama dengan jumlah individu muda pada periode t yaitu L_t dikalikan dengan jumlah yang ditabung oleh tiap individu dan dikurangangi dengan jumlah konsumsinya $w_t A_t - C_{1t}$. Kombinasi kapital ini dengan hasil kerja dari individu muda membuat proses berkelanjutan. Konsumsi periode kedua dari individu yang lahir pada t adalah

$$C_{2t+1} = (1+r_{t+1})(w_t A_t - C_{1t}). \tag{12}$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan dengan $1+r_{t+1}$ dan membawa C_{1t} pada ruas kiri persamaan, diperoleh

$$C_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}} C_{2t+1} = A_t w_t . \tag{13}$$

Persamaan diatas tidak lain mengatakan bahwa nilai keseluruhan konsumsi sama dengan kekayaan awal (yang bernilai nol) ditambah dengan nilai hasil kerja seumur hidup $A_t w_t$.

Langrange dari memaksimumkan fungsi utilitas individu subjek pada kendala budget adalah

$$\mathcal{L} = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda\left[A_t w_t - \left(C_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}}C_{2t+1}\right)\right]. \qquad (14)$$

Kondisi turunan pertama adalah

$$C_{1t}^{-\theta} = \lambda \qquad (15)$$

$$\frac{1}{1+\rho}C_{2t+1}^{-\theta} = \frac{1}{1+r_{t+1}}\lambda. \qquad (16)$$

Substitusi persamaan yang pertama ke persamaan kedua diperoleh

$$\frac{1}{1+\rho}C_{2t+1}^{-\theta} = \frac{1}{1+r_{t+1}}C_{1t}^{-\theta}, \qquad (17)$$

atau

$$\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}} = \left[\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right]^{1/\theta}. \qquad (18)$$

Persamaan diatas memperlihatkan bahwa peningkatan ataupun pengurangan konsumsi individu bergantung pada laju pengembalian yang lebih besar atau kecil dari laju diskon. θ menentukan variasi konsumsi individu dalam responnya terhadap perbedaaan antara r dan ρ.

Untuk menyatakan C_{1t} dalam bentuk pendapatan kerja dan laju suku bunga, kalikanlah kedua ruas persamaan (13) dengan C_{1t} dan substitusikan ke kendala budget dan diperoleh

$$C_{1t} + \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}}C_{1t} = A_t w_t, \qquad (19)$$

atau dalam bentuk lain

$$C_{1t} = \frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}A_t w_t. \qquad (20)$$

Persamaan diatas memperlihatkan bahwa laju suku bunga menentukan pecahan dari pendapatan individu yang dikonsumsi pada periode pertama. Dengan menuliskan $s(r)$ sebagai pecahan pendapatan yang ditabung diperoleh

$$s(r_{t+1}) = \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}. \qquad (21)$$

atau dapat ditulis ulang sebagai

$$C_{1t} = [1 - s(r_{t+1})]A_t w_t . \tag{22}$$

Persamaan (21) diatas mempunyai arti bahwa tabungan individu muda bertambah dalam r jika dan hanya jika $(1+r)^{(1-\theta)/\theta}$ bertambah dalam r. Turunan dari $(1+r)^{(1-\theta)/\theta}$ terhadap r adalah $[(1-\theta)/\theta](1+r)^{(1-2\theta)/\theta}$. Jadi s bertambah dalam r bila θ kurang dari 1 dan berkurang bila θ lebih dari 1. Pertambahan dalam r mempunyai pengaruh terhadap pendapatan dan efek substitusi. Kenyataan yang ada bahwa konsumsi dalam kedua periode lebih disukai pada periode kedua yakni meningkatkan tabungan terlebih dahulu. Individu ingin mengsubstitusi konsumsi diatara kedua periode berdasarkan keuntungan yang diperoleh dari laju pengembalian insentif yakni bilamana θ rendah atau efek substitusi mengdominasi. Sebaliknya setiap individu mempunyai level konsumsi yang tertentu dalam mengkonsumsi pada kedua level bilamana θ tinggi. Untuk kasus yang tertentu bila $\theta = 1$ kedua efek seimbang, invididu muda mempunyai laju menabung yang bebas dari r.

4. Dinamika Model Diamond

Stok kapital digambarkan pada periode $t+1$ merupakan jumlah yang ditabung individu muda dalam periode t, jadi

$$K_{t+1} = s(r_{t+1})L_t A_t w_t \tag{23}$$

Disini patut dicatat bahwa tabungan dalam periode t bergantung pada pendapatan kerja pada periode tersebut dan pengembalian pada kapital yang penabung harapkan di periode berikutnya yaitu w dalam periode t dan r dalam periode $t+1$ yang akan memasuki stok kapital pada periode $t+1$.

Bagi kedua ruas persamaan (23) dengan $L_{t+1}A_{t+1}$ akan memberikan ekspresi untuk $K_{t+1}/A_{t+1}L_{t+1}$ yaitu kapital per unit kerja efektif

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s(r_{t+1})w_t , \tag{24}$$

yang juga dapat ditulis

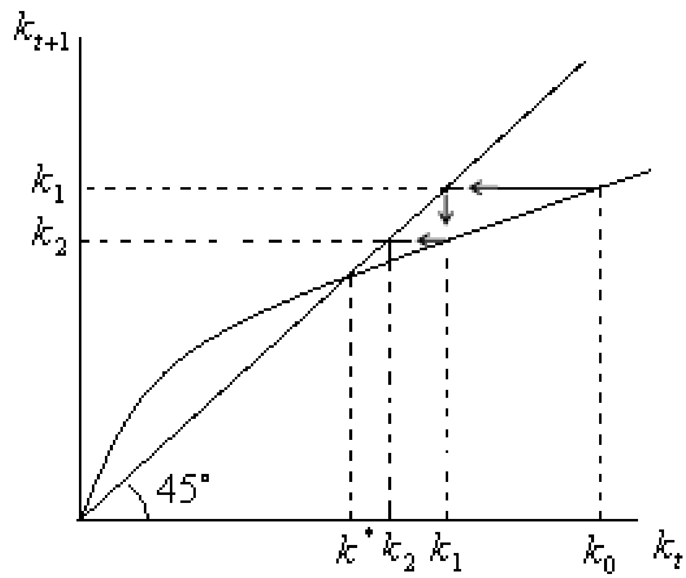
$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s(f'(k_{t+1}))\left[f(k_t) - k_t f'(k_t)\right]. \tag{25}$$

Terlihat dari persamaan diatas bahwa k_{t+1} secara implisit merupakan fungsi dari k_t. Bila diberikan suatu nilai awal untuk k_t akan dapat terlihat kapital akan berevolusi. Bila $k_{t+1} = k_t$, kapital senantiasa tidak akan berubah lagi. Nilai ini yang dikenal sebagai keadaan setimbang dari kapital.

Bila $\theta = 1$, persamaan (21) memberikan pecahan dari pendapatan pekerja yang ditabung menjadi $1/(2+\rho)$. Ketika fungsi produksi Cobb-Douglas $f(k) = k^{\alpha}$ dan $w = (1-\alpha)k^{\alpha}$, persamaan (25) segera tereduksi menjadi

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \frac{1}{2+\rho} (1-\alpha) k_t^{\alpha} \equiv D k_t^{\alpha} . \qquad (26)$$

Gambar di bawah memperlihatkan k_{t+1} sebagai fungsi dari k_t. Titik dimana grafik fungsi memotong garis lurus yang berkemiringan 45° merupakan keadaan dimana $k_{t+1} = k_t$. Bila k_t kecil, kurva akan tumbuh keatas hingga memotong garis lurus 45° dan tetap berada dibawahnya. Jadi hanya dipunyai satu titik setimbang yaitu k^*.



Gambar 1. Dinamika *k*.

Di sini nilai k stabil secata global, dimanapun dimulai akan berakhir pada k^*. Bila nilai awal k yaitu k_0 lebih besar dari k^* berarti k_{t+1} kurang dari k_t dan karena k_t masih lebih besar k^*, k_1 akan lebih kecil dari k_0. Bila k_0 melebihi k^* maka k_{t+1} berkurang dalam k_t. Jadi bila k_1 berada diantara k^* dan k_0, k akan bergerak menuju ke k^*. Proses ini berjalan mulus secara kontinu ke k^*. Demikian pula sebaliknya bila k_0 lebih kecil dari k^*, proses nilai k akan bertambah menuju k^*

Daftar Pustaka

1. Romer, D., 1996, *Advanced Macroeconomics.* McGraw-Hill Companies Inc., United States Military Academy, West Point.

2. Diamond, Douglas W., 1984, *Financial Intermediation and Delegated Monitoring.* Review of Economic Studies 51 (July): 393-414.

3. Diamond, Peter A., *National Debt in a Neoclassical Growth Model.* American Economic Review 55 (December): 1126-1150.

4. Solow, R.M., 1957, A contribution to the theory of Economics growth, *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.

5. Solow, R.M., Stiglitz, J.E., 1968, Output, employment, and wages in the sort run, *Quarterly Journal of Economics*, 82, 537-560.