J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 3, No.2, 80-85, Januari 2007
ISBN:1858-1382

Batas Nilai Eigen Maksimal Dari Matriks Tak Negatif

A. Kresna Jaya*

Abstrak

Ide utama skripsi ini adalah untuk mendapatkan metode dalam menentukan batas dari nilai eigen maksimal dari matriks tak negatif, dengan berdasarkan batas Frobenius. Yaitu $\rho \leq r \leq R$, dimana ρ adalah jumlah baris atau kolom minimum dan R adalah jumlah baris atau kolom maksimum. Kemudian dengan menggunakan batas bawah adalah maksimum dari jumlah baris atau kolom minimum sedangkan batas atas adalah jumlah minimum dari jumlah baris atau kolom maksimum. Metode yang diperoleh adalah

$$maks\{\min_i\{r_i\}, \min_i\{c_i\}\} \leq r \leq \min\{maks_i\{r_i\}, maks_i\{c_i\}\}.$$

Setelah diperoleh metode baru kemudian dibandingkan dengan metode sebelumnya, untuk beberapa kasus diperoleh batas nilai eigen maksimal yang lebih optimal untuk metode ini.

Kata Kunci : *batas nilai eigen maksimal, nilai eigen maksimal, matriks tak negatif.*

1. Pendahuluan

Menurut Howard Anton (1991), secara teoritis, nilai-nilai eigen dari matriks **A** dapat diperoleh dengan mencari n akar dari $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, kemudian dapat diperoleh vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen-nilai eigennya.

Dalam penempatan nilai eigen maksimal dari suatu matriks nonnegatif mempunyai arti penting tidak hanya pada matematika teoritis tetapi juga pada perhitungan dimana proses iterasi yang memerlukan suatu perkiraan awal menyangkut nilai eigen maksimal. Untuk itu kita perlu mengetahui perkiraan awal tersebut dengan membatasi nilai eigen maksimal dengan fungsi entri-entri yang dapat diperhitungkan dari matriks, misalnya penjumlahan baris atau kolom. Misalkan r_i didefinisikan jumlah baris ke-i dan c_j didefinisikan jumlah kolom ke-j dari suatu matriks $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_n(C)$, yang berturut-turut, adalah :

$$r_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{dan} \quad c_j = a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Batas yang dikenal dan paling sering digunakan untuk nilai eigen maksimal dari suatu matriks tak negatif adalah batas nilai eigen *Frobenious*, yaitu:

jika $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks tak negatif dengan nilai eigen maksimal r dan $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ adalah jumlah baris ke-1 hingga ke-n, maka

$$\rho \leq r \leq R$$

di mana $\rho = \min_i r_i$ dan $R = \max_i r_i$. (Minc Henryk, 1988).

Matriks nonnegatif adalah matriks yang entri-entrinya adalah bilangan riil tak negatif. Matriks ini biasanya banyak digunakan dalam teori graph (membuat matriks adjacency) atau dalam statistik khususnya proses stokastik.

---

* *Staf pengajar pada Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

2. Teorema-Teorema tentang Batas Nilai Eigen Maksimal

Teorema 1 *(Probenius)*

Jika $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks taknegatif dengan nilai eigen maksimal r dan $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ adalah jumlah baris ke 1, 2, . . . , *n* berturut-turut, maka

$$\rho \le r \le R$$

di mana $\rho = \min_i r_i$ dan $R = \max_i r_i$ .Jika **A** adalah matriks tak tereduksi, maka persamaan berlaku jika dan hanya jika jumlah baris dari matriks **A** adalah sama.

Lemma 1

Misalkan α adalah nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$, misalkan $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n})$ adalah vektor eigen yang sesuai untuk α dari $\mathbf{A}$ dan $(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_n})$ adalah vektor eigen yang sesuai dengan α dari $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

Teorema 2

Misalkan matriks $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$ adalah suatu matriks taknegatif dengan $r_1, r_2, \dots, r_n$ jumlah baris yang taknol dan r nilai eigen maksimal. kemudian

$$\min_i \left(\frac{1}{r_i} \sum_{t=1}^{n} a_{it} r_t \right) \le r \le \max_i \left(\frac{1}{r_i} \sum_{t=1}^{n} a_{it} r_t \right)$$

Teorema 3 (*Ledermann*)

Misalkan matriks $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$ adalah matriks positif dengan r nilai eigen maksimal dan $r_1, r_2, \dots, r_n$ jumlah baris. Jika

$$R = \max_i r_i,\ \rho = \min_i r_i,\ \eta = \min_{i,j} a_{ij}\ \textit{dan}\ R > \rho,$$

maka

$$\rho + \eta \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1 \right) \le r \le R - \eta \left(1 - \sqrt{\delta}\right)$$

dengan $\delta = \max_{r_i < r_j} (r_i / r_j)$

Teorema 4 (*Ostrowski*)

Misalkan matriks $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$ adalah matriks positif dengan r nilai eigen maksimal dan $r_1, r_2, \dots, r_n$ jumlah baris. Jika $R = \max_i r_i$, $\rho = \min_i r_i$, $\eta = \min_{i,j} a_{ij}$, maka

$$\rho + \eta \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \le r \le R - \eta (1 - \sigma)$$

dimana $\sigma = \sqrt{(\rho - \eta)/(R - \eta)}$

3. Metode Baru Untuk Batas Nilai Eigen Maksimal

Batas nilai eigen maksimal dengan menggunakan batas dasar dalam hal ini batas Frobenius kita mempunyai metode baru. Misalkan matriks $\mathbf{A}=(\mathbf{a_{ij}})$ adalah matriks positif dengan r nilai eigen maksimal dan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ jumlah baris, dimana $\rho=$ min$_i\, r_i$ atau min$_i\, c_i$ dan $R=$max$_i\, r_i$ atau max$_i\, c_i$,

Maka,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = r x_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Sekarang, jika $x_\mu \le x_j$ maka $j = 1, 2, \ldots, n$, maka

$$Ax = rx$$

dengan:

$$r = \frac{1}{x_\mu} \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j} x_j$$

$$= \frac{1}{x_\mu} \left(a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \ldots + a_{\mu n} x_n \right)$$

$$= a_{\mu 1} \frac{x_1}{x_\mu} + a_{\mu 2} \frac{x_2}{x_\mu} + \ldots + a_{\mu n} \frac{x_n}{x_\mu}$$

$$a_{\mu 1} \frac{x_1}{x_\mu} \ge a_{\mu 1}$$

$$a_{\mu 2} \frac{x_2}{x_\mu} \ge a_{\mu 2}$$

$$\vdots$$

$$a_{\mu n} \frac{x_n}{x_\mu} \ge a_{\mu n}$$

$$\overline{} +$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\mu j} \frac{x_j}{x_\mu} \ge \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j}$$

$$\ge \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j} = r_\mu \ge \rho$$

$$A^T x = rx$$

$$r = \frac{1}{x_\mu} \sum_{j=1}^{n} a_{j\mu} x_j$$

$$= \frac{1}{x_\mu} \left(a_{1\mu} x_1 + a_{2\mu} x_2 + \ldots + a_{n\mu} x_n \right)$$

$$a_{1\mu} \frac{x_1}{x_\mu} \ge a_{1\mu}$$

$$a_{2\mu}\frac{x_2}{x_\mu} \ge a_{2\mu}$$
$$\vdots$$
$$a_{n\mu}\frac{x_n}{x_\mu} \ge a_{n\mu}$$
$$\underline{\hspace{4cm}} +$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{j\mu}\frac{x_j}{x_\mu} \ge \sum_{j=1}^{n} a_{j\mu}$$

$$\ge \sum_{j=1}^{n} a_{j\mu} = c_\mu \ge \rho$$
$$\min{}_i\, r_i \le r \quad \text{atau} \quad \min{}_i\, c_i \le r$$
$$\Rightarrow maks\left\{\min{}_i\{r_i\}, \min{}_i\{c_i\}\right\} \le r \tag{1}$$
$$Ax = rx$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = rx_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Sekarang, jika $x_m \ge x_j$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n$.

Maka

$$r = \frac{1}{x_m}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j$$
$$= \frac{1}{x_m}\left(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\right)$$
$$= a_{m1}\frac{x_1}{x_m} + a_{m2}\frac{x_2}{x_m} + \ldots + a_{mn}\frac{x_n}{x_m}$$
$$a_{m1}\frac{x_1}{x_m} \le a_{m1}$$
$$a_{m2}\frac{x_2}{x_m} \le a_{m2}$$
$$\vdots$$
$$a_{mn}\frac{x_n}{x_m} \le a_{mn}$$
$$\underline{\hspace{4cm}} +$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\frac{x_j}{x_m} \le \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = r_m \le R$$
$$A^T x = rx$$

$$r = \frac{1}{x_m}\sum_{j=1}^{n} a_{jm}x_j$$
$$= \frac{1}{x_m}\left(a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + .. + a_{nm}x_n\right)$$

$$a_{1m}\frac{x_1}{x_m} \le a_{1m}$$
$$a_{2m}\frac{x_2}{x_m} \le a_{2m}$$
$$\vdots$$
$$a_{nm}\frac{x_n}{x_m} \le a_{nm}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} +$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jm}\frac{x_j}{x_m} \le \sum_{j=1}^{n} a_{jm}$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} a_{jm} = c_m \le R$$

$$maks_i r_i \ge r \quad \text{atau} \quad maks_i c_i \ge r$$
$$\Rightarrow \min\{maks_i\{r_i\}, maks_i\{c_i\}\} \ge r \tag{2}$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita peroleh

$$maks\{\min_i\{r_i\}, \min_i\{c_i\}\} \le r \le \min\{maks_i\{r_i\}, maks_i\{c_i\}\}$$

selanjutnya kita sebut dengan metode baru 1.
Metode baru 1 kita kombinasikan dengan teorema 4, maka

$$maks\{\min_i\{r_i\}, \min_i\{c_i\}\} \le r \le \min\{maks_i\{r_i\}, maks_i\{c_i\}\}$$

sedangkan teorema 4 mengatakan bahwa

$$r_n + \eta\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \le r \le r_1 - \eta(1 - x_n)$$
$$c_n + \eta\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \le r \le c_1 - \eta(1 - x_n)$$

maka kita dapatkan

$$maks\{\min_i\{r_i\}, \min_i\{c_i\}\} + \eta\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \le r \le \min\{maks_i\{r_i\}, maks_i\{c_i\}\} - \eta(1-\sigma)$$

selanjutnya kita sebut dengan metode baru 2.

Contoh 1 *Perbandingan*

Hitunglah batas yang diberikan dari teorema 1, 2, 3 ,.4, metode baru 1, metode baru dan metode yang masih dalam bentuk hipotesis yang kita dapatkan, untuk nilai eigen maksimal r dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Teorema 1 (Frobenius):	$5 < r < 9$	(baris)
	$3 < r < 8$	(kolom)
Teorema 2:	$5{,}8 < r < 7{,}66$	(baris)
	$6{,}12 < r < 7$	(kolom)
Teorema 3 (Ledermann):	$5{,}342 < r < 8{,}658$	(baris)
	$3{,}633 < r < 7{,}612$	(kolom)
Teorema 4 (Ostrowski):	$5{,}414 < r < 8{,}707$	(baris)
	$3{,}414 < r < 7{,}707$	(kolom)
Metode baru 1:	$5 < r < 8$	
Metode baru 2:	$5{,}414 \le r \le 7{,}707$	

Nilai eigen maksimal yang sebenarnya adalah $r = 7$

4. Penutup

Batas nilai eigen matriks tak negatif selalu berada dalam rentang

$$maks\{\min_i \{r_i\}, \min_i \{c_i\}\} \le r \le \min\{maks_i \{r_i\}, maks_i \{c_i\}\}$$

atau dalam rentang yang lebih baik

$$maks\{\min_i \{r_i\}, \min_i \{c_i\}\} + \eta\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \le r \le \min\{maks_i \{r_i\}, maks_i \{c_i\}\} - \eta(1-\sigma),$$

dengan r_i adalah jumlah baris ke-i untuk i = 1, 2, ..., n, c_i adalah jumlah kolom ke-i untuk i = 1, 2, ..., n, $R = \max_i r_i$, $\rho = \min_i r_i$, $\eta = \min_{i,j} a_{ij}$ dan $\sigma = \sqrt{(\rho - \eta)/(R - \eta)}$.

Daftar Pustaka

[1] Howard Anton,1988, "*Aljabar Linear Elementer",* Edisi Kelima, Erlangga Jakarta.

[2] A. Kresna Jaya, 2001, "*Masalah Nilai Karakteristik Invers Real Nonnegatif"*. Tesis.

[3] A.Kresna Jaya,2005, "*Batas Himpunan Spektrum Nilai Eigen Real untuk Masalah Balikan Nilai Eigen dari Matriks Tak Negatif",*. Makalah.

[4] Erwin Kreyszig,1993, "*Advanced Engineering Mathematics",* Seventh Edition. John Wiley & Sons, Inc. Canada.

[5] Henryk Minc.,1988,"*Nonegative Matrices",* Departement of Mathematics University of California Santa Barbara.