ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 2, No.1, 31-39, Juli 2005

Kestabilan Loop Tertutup

Nur Erawati†

Abstrak

Misalkan $P(s)$ suatu sistem linier yang transfer matriksnya berupa matriks rasional proper. Misalkan pula $C(s)$ suatu sistem linier yang lain, yang merupakan kompensator dari $P(s)$. Tulisan ini membahas kondisi-kondisi $C(s)$ menstabilkan $P(s)$.

Keywords: *Sistem linier, kompensator, kestabilan.*

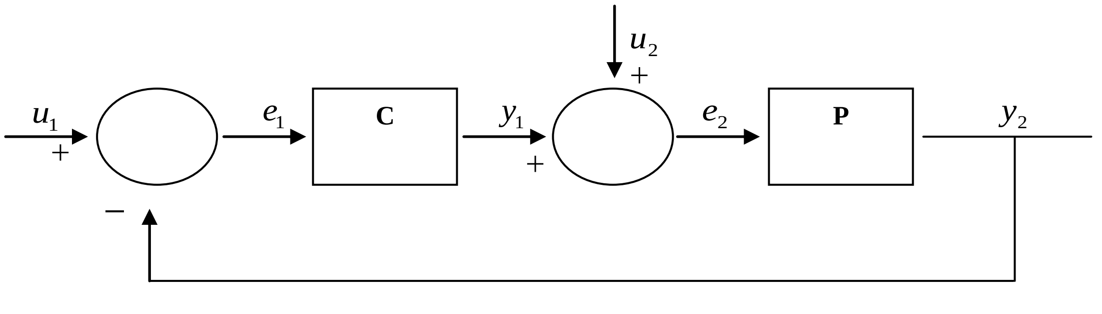
1. Pendahuluan

Dalam sistem kontrol linier, masalah yang muncul, bagaimana mendefinisikan kestabilan suatu system. Atau kondisi apa yang dipenuhi system tersebut sehingga system tersebut disebut stabil. Bagaimana kondisi yang dipenuhi jika ada suatu kompensator yang menstabilkan. Pembahasan dibatasi pada sistem linier yang transfer matriksnya berupa matriks rasional proper dan dilakukan dengan memanfaatkan sifat-sifat matriks secara umum. Bentuk kanonik Smith-McMillan digunakan untuk mendefinisikan *S-Matrix Fraction Description*, yang selanjutnya digunakan untuk mengetahui apakah suatu kompensator disebut menstabilkan suatu plant.

2. Pembahasan

Perhatikan sistem feedback berikut ini, dimana $P(s)$menyatakan plant, obyek yang dikontrol dan $C(s)$ kompensator, pengontrol.Misalkan $u_1(s)$, $u_2(s)$input dari luar sistem;$e_1(s)$input kompensator, $e_2(s)$ input plant, $y_1(s)$ output kompensator, dan $y_2(s)$ output plant. Misalkan $P(s) \in \Re_{pr}^{p\times m}(s)$, $C(s) \in \Re_{pr}^{m\times p}(s)$ dan

$$y_1 = Ce_1$$
$$y_2 = pe_2$$
$$e_1 = u_1 - y_2$$
$$e_2 = u_2 + y_1$$



---

†*Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

Sistem di atas dapat ditulis dalam bentuk blok matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$$

dari kedua persamaan di atas diperoleh:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -C(s) \\ P(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & C(s) \\ P(s) & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

misalkan $\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}$ ada, maka

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

tulis $H_{yu}(P,C) = \begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix}$, dimana $H_{yu}(P,C)$ merupakan

matriks fungsi transfer dari input $u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$ ke output $y(s) = \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}$.

Jadi matriks transfer $H_{yu}(P,C)$ terdefenisi dengan baik kalau $K^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}$ ada

atau ekivalen dengan $|K| \neq 0$ jika $H_{yu}(P,C)$ dinyatakan terdefenisi dengan baik maka dikatakan bahwa sistem loop tertutup $\sum(P,C)$ '*well posed*'.

Selanjutnya pasangan (P,C) stabil jika $|K| \neq 0$ dan $H_{yu}(P,C) \in S^{(p+m)\times(p+m)}$.$C(s)$ disebut kompensator yang menstabilkan $P(s)$ jika sistem $\sum(P,C)$ stabil.Dapat dilihat bahwa $\sum(P,C)$ stabil jika hanya jika $\sum(C,P)$ stabil.

Tulisan ini bertujuan ingin melihat bentuk suatu kompensator $C(s)$ untuk suatu plant $P(s)$. sebelumnya, didefenisikan dulu S-Matrix Fraction Description dari suatu matriks. Untuk itu kita memerlukan proposisi berikut yang dalam pembuktiannya menggunakan teorema bentuk kanonik Smith-McMillan.

Proposisi 1.
Missal $T(s) \in \Re(s)^{p\times m}$ dengan rank$_{\Re(s)} T(s) = r$,maka T(s) dapat dinyatakan sebagai $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ dimana $A_1(s) \in S^{pxp}, B_1(s) \in S^{p\times m}$ saling prim kiri di $\overline{\Omega}$, $A_2(s) \in S^{m\times m}, B_2(s) \in S^{p\times m}$ saling prim kanan di $\overline{\Omega}$.

Bukti:
Misal $U_L(s) \in S^{p\times p}, U_R(s) \in S^{m\times m}$, $U_L(s)T(s)U_R(s) \in S-$matriks unimodular
Misalkan

$$S_{T(s)}^{\overline{\Omega}} =' diag\left[\frac{\xi_1(s)}{\psi_1(s)},\cdots,\frac{\xi_r(s)}{\psi_r(s)}\right] \in \Re(s)^{pxm}$$

Kemudian dapat ditulis

$$S_{T(s)}^{\overline{\Omega}} = \Psi_L^{\overline{\Omega}}(s)^{-1} E^{\overline{\Omega}}(s) = E^{\overline{\Omega}}(s)\psi_R^{\overline{\Omega}}(s)^{-1}$$

dengan

$$\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s) = diag\left[\psi_1(s),\cdots,\psi_r(s), I_{p-r}\right] \in S^{pxp}$$
$$E^{\overline{\Omega}}(s) = diag\left[\xi_1(s),\cdots,\xi_r(s) 0_{p-r,m-r}\right] \in S^{pxm} \; .$$
$$\Psi_R^{\Omega}(s) = diag\left[\psi_1(s),\cdots,\psi_r(s), I_{m-r}\right] \in S^{mxm}$$

Definisikan

$$A_1(s) = \Psi_L^{\overline{\Omega}}(s) U_L(s)$$
$$A_2(s) = U_R(s)\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)$$
$$B_1(s) = E^{\overline{\Omega}}(s) U_R(s)^{-1}$$
$$B_2(s) = U_L(s)^{-1} E^{\overline{\Omega}}(s)$$

sehingga diperoleh

$$\left[B_1(s) A_1(s)\right] = \left[E^{\overline{\Omega}}(s)\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)\right]\begin{bmatrix} U_R(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_L(s)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_R(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^{\overline{\Omega}}(s) \\ \Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)\end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} U_R(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_L(s)\end{bmatrix}$ S-matriks unimodular dan $E^{\overline{\Omega}}(s), \Psi_L^{\overline{\Omega}}(s)$ saling prim kiri maka $A_1(s)$ saling prim kiri dengan $B_1(s)$ di $\overline{\Omega}$ .Dengan cara yang sama pula diperoleh $A_2(s)$ saling prim kanan dengan $B_2(s)$ di $\overline{\Omega}$ .Perhatikan bahwa

$$\left|A_1(s)\right| = \left|\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s)\right|\left|U_L(s)\right| dan \left|A_2\right| = \left|U_R(s)\right|\left|\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)\right|$$

Karena $U_L(s)$ dan $U_R(s)$ matriks unimodular, $\left|U_L(s)\right| dan \left|U_R(s)\right|$ suatu unit di *S*, dan pula $\left|\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s)\right| = \left|\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)\right|$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left|A_1(s)\right|$ sekawan dengan $\left|A_2(s)\right|$.

Definisi 2.
Pasangan $A_1(s)$, $B_1(s)$ atau $A_2(s)$, $B_2(s)$ yang memenuhi proposisi di atas disebut *S-Matrix Fraction Description* (S-MFD) dari T(s) yang saling prim kiri atau kanan di $\overline{\Omega}$.
Misalkan $P(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ masing-masing adalah *S*-MFD dari *P*(*s*) yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$ dimana $A_1(s) \in S^{pxp}, B_1(s) \in S^{pxm}, B_2(s) \in S^{pxm}, A_2(s) \in S^{mxm}$.

Dan misalkan pula $C(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$ juga *S*-MFD dari *C*(*s*) yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$ dengan $D_1(s) \in S^{mxm}, N_1(s) \in S^{mxp}, N_2(s) \in S^{mxp}, D_2(s) \in S^{pxp}$ maka

$$\begin{bmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & D_1(s)^{-1}N_1(s) \\ -A_1(s)^{-1}B_1(s) & I_p \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} D_1(s)^{-1} & 0 \\ 0 & A_1(s)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_1(s) & 0 \\ 0 & A_1(s) \end{bmatrix}.$$

Mengingatbahwa

$$H_{yu}(P,C) = \begin{bmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_1(s) & 0 \\ 0 & A_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(s)^{-1}N_1(s) & 0 \\ 0 & A_1(s)^{-1}B_1(s) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_1(s) & 0 \\ 0 & B_1(s) \end{bmatrix}$$
$$= D_{yl}(s)^{-1} \quad N_{yl}(s)$$

Jelas bahwa $D_{yl}(s), N_{yl}(s) \in S^{(m+p)x(m+p)}$
Dengan cara yang sama diperoleh

$$H_{yu}(P,C) = \begin{bmatrix} 0 & N_2(s) \\ B_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & -N_2(s) \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= N_{yr}(s) \quad D_{yr}(s)^{-1}$$

Jelas pula $N_{yr}(s), D_{yr}(s) \in S^{(m+p)x(m+p)}$

Proposisi 3.
$D_{yl}(s), N_{yl}(s)$ saling prim kiri di $\overline{\Omega}$ dan $N_{yr}(s), D_{yr}(s)$ saling prim kanan di $\overline{\Omega}$.

Bukti:

$$\begin{bmatrix} D_{yl}(s) \mid N_{yl}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) & | & N_1(s) & 0 \\ -B_1(s) & A_1(s) & | & 0 & B_1(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & I_p & 0 \\ I_m & 0 & 0 & -I_m \\ 0 & I_p & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M}$$

Karena diketahui $D_1(s), N_1(s)$ saling prim, begitu pula $B_1(s), A_1(s)$ saling prim dan M matriks unimodular, jadi $D_{yl}(s), N_{yl}(s)$ saling prim.Dengan cara yang sama dapat dibuktikan pula $D_{yr}(s), N_{yr}(s)$ saling prim.

Dari uraian di atas, telah diperoleh $H_{yu}(P,C) = D_{yl}(s)^{-1} N_{yl}(s) = N_{yr}(s) D_{yr}(s)^{-1}$. Jika *C*(*s*) menstabilkan *P*(*s*), berarti $H_{yu}(P,C) \in S^{(m+p)x(m+p)}$. Hal ini terjadi jika dan hanya jika matriks penyebut

$$D_{yl}(s) = \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \in S^{(m+p)x(m+p)}$$

$$D_{yr}(s) = \begin{pmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & N_2(s) \end{pmatrix} \in S^{(m+p)x(m+p)}$$

keduanya *S*-unimodular.

D_{yl} merupakan matriks *S*-unimodular jika dan hanya jika

$$\left|D_{yl}(s)\right| = \left|\begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix}\right|$$
$$= \left|D_1(s)\right| \left|A_1(s) + B_1(s) D_1(s)^{-1} N_1(s)\right|$$
$$= \left|D_1(s)\right| \left|A_1(s) D_2(s) + B_1(s) N_2(s) D_2(s)^{-1}\right|$$
$$= \left|A_1(s) D_2(s) + B_1(s) N_2(s)\right| = u(s) \in S$$

dengan *u*(*s*) suatu unit di *S*.Ekivalen dengan $A_1(s)D_2(s) + B_1(s)N_2(s) = F_1 \in S^{pxp}$ S-unimodular.Dengan cara yang sama $D_{yr}(s)$ *S*-unimodular jika hanya jika

$$\left|D_{yr}(s)\right| = \left|\begin{pmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & -N_2(s) \end{pmatrix}\right| = \left|D_1(s)A_2(s) + N_1(s)B_2(s)\right| = u'(s) \in S$$

dengan $u'(s)$ suatu unit di S.Ekivalen dengan $D_1(s)A_2(s)+N_1(s)B_2(s)=F_2 \in S^{mxm}$ S-unimodular.Dari penjelasan di atas, kita peroleh teorema berikut.

Teorema 4.
Misalkan $P(s)\in \Re_{pr}^{pxm}(s)$ dan $P(s)=A_1(s)^{-1}B_1(s)=B_2(s)A_2(s)^{-1}$ masing-masing S-MFD dari *P*(*s*) yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$.
Misalkan pula $C(s)\in \Re_{pr}^{mxp}(s)$ dan $C(s)=D_1(s)^{-1}N_1(s)=N_2(s)D_2(s)^{-1}$ masing-masing *S*-MFD dari *C*(*s*) yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$, maka pernyataan berikut ekivalen

(i). $C(s)\,\Omega$-menstabilkan $P(s)$

(ii). $\begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix} \in S^{(m+p)x(m+p)}$ merupakan *S*-unimodular

(iii). $\begin{bmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_1(s) & -N_2(s) \end{bmatrix} \in S^{(m+p)x(m+p)}$ merupakan *S*-unimodular

(iv). $A_1(s)D_2(s)+B_1(s)N_2(s)=F_1 \in S^{pxp}$ merupakan *S*-Unimodular

(v). $D_1(s)A_2(s)+N_1(s)B_2(s)=F_2 \in S^{mxm}$ merupakan *S*-unimodular.

Akibat 5.
Misalkan $P(s)\in \Re_{pr}^{p\times m}(s)$ dan $P(s)=A_1(s)^{-1}B_1(s)=B_2(s)A_2(s)^{-1}$ masing-masing merupakan *S*-MFD dari $P(s)$ yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$. Misalkan $C(s)\in \Re_{pr}^{m\times p}(s)$ dan $C(s)\,\Omega$-menstabilkan $P(s)$. Maka $C(s)$ mempunyai *S*-MFD yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$ dengan $C(s)=D_1(s)^{-1}N_1(s)=N_2(s)D_2(s)^{-1}$ sedemikian sehingga:

$$A_1(s)D_2(s)+B_1(s)N_2(s)=I_p$$
$$D_1(s)A_2(s)+N_1(s)B_2(s)=I_m$$

Bukti:
Misalkan $C(s)=\tilde{D}_1(s)^{-1}\tilde{N}_1(s)=\tilde{N}_2(s)\tilde{D}2(s)^{-1}$ masing-masing *S*-MFD dari $C(s)$ yang saling prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$. Menurut Teorema 4(i) dan 4(v) di atas, $C(s)\,\Omega$-menstabilkan $P(s)$ jika dan hanya jika matriks $\tilde{D}_1(s)A_2(s)+\tilde{N}_1(s)B_2(s)=F_2 \in S^{m\times m}$.
Jadi

$$F_2^{-1}\tilde{D}_1(s)A_2(s)+F_2^{-1}\tilde{N}_1(s)B_2(s)=I_m$$

Definisikan

$$D_1=F_2^{-1}\tilde{D}_1(s)\in S^{m\times m}$$
$$N_1=F_2^{-1}\tilde{N}_1(s)\in S^{p\times p}$$

Maka $C(s)=D_1(s)^{-1}N_1(s)$ merupakan *S*-MFD dari $C(s)$ saling prim kiri di $\overline{\Omega}$ dan $D_1(s)A_2(s)+N_1(s)B_2(s)=I_m$. Untuk persamaan $A_1(s)D_2(s)B_1(s)N_2(s)=I_p$, dibuktikan dengan cara yang sama.

Catatan 6.
Perhatikan

$$P(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$$

atau

$$A_1(s)\left[A_1(s)^{-1}B_1(s)\right]A_2(s) = A_1(s)\left[B_2(s)A_2(s)^{-1}\right]A_2(s)$$

Sehingga

$$B_1(s)A_2(s) = A_1(s)B_2(s)$$

dan pula

$$C(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$$
$$D_1(s)\left[D_1(s)^{-1}N_1(s)\right]D_2(s) = D_1(s)\left[N_2(s)D_2(s)^{-1}\right]D_2(s)$$

sehingga

$$N_1(s)D_2(s) = D_1(s)N_2(s).$$

persamaan yang telah diperoleh, dituliskan dalam bentuk blok matriks

$$\text{(i)} \quad \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Dengan menukar urutan matriks diperoleh pila

$$\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Kedua persamaan diatas dikenal sebagai identitas Bezout.Dari persamaan identitas Bezout diatas (khususnya (ii)) diperoleh pula akibat berikut.

Akibat 7.
Misalkan $P(s) = \in \Re_{pr}^{p\times m}(s)$ dan

$$P(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$$

masing-masing adalah *S*-MFD dari yang prim kiri dan kanan di $\overline{\Omega}$. $C(s) \in \Re_{pr}^{m\times p}(s)$ dan $C(s)$ Ω-menstabilkan $P(s)$.Maka $C(s)$ mempunyai *S*-MFD yang saling prim kiri dan kanan di Ω yaitu $C(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$ sedemikian sehingga:

$$A_2(s)D1(s) + N_2(S)B_1(s) = I_m$$
$$D_2(s)A_1(s) + B_2(s)N_1(s) = I_p$$
$$A_2(s)N_1(s) = N_2(s)A_1(s)$$
$$B_2(s)D_1(s) = D_2(s)B_1(s).$$

2. Aplikasi pada Persamaan Diferensial

Pada bagian ini, metode yang baru saja didapat akan dibandingkan keakuratannya dengan metode yang berorde rendah, dalam hal ini Adams-Bashforth-Moultonorde empat. Dan untuk mendapatkan beberapa nilai awal lain, kita menggunakan metode Runge-Kutta orde lima (lihat [6]) yang memiliki persamaan :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n)\\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{3}k_1)\\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2)\\
k_4 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_2)\\
k_5 &= hf(x_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{2}{27}k_1 + \tfrac{1}{9}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{4}{27}k_4)\\
k_6 &= hf(x_n + h, y_n - \tfrac{1}{22}k_1 + \tfrac{3}{22}k_2 + \tfrac{27}{11}k_3 - 4k_4 + \tfrac{27}{11}k_5)\\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{120}\left(11k_1 + 81k_3 - 64k_4 + 81k_5 + 11k_6\right)
\end{aligned}
$$

Disini akan ditinjau persamaan diferensial dengan syarat awal :

$$y' = y - x + 2, \qquad y(0) = 0$$

yang mempunyai solusi eksak $y(x) = e^x + x - 1$.

Hasil perhitungan dengan memilih $h = 0{,}1$ dan diperoleh hasil seperti yang tersaji pada tabel berikut :

x	$e^{x_n} + x_n - 1$	P-C orde 4		P-C orde 5		Runge-Kutta orde 5	
		y_n	Error	y_n	Error	y_n	Error
0,5	1.1487212707	1.1487216822	4.12E-07	1.1487212735	2.84E-09	1.1487212602	1.05E-08
0,6	1.4221188004	1.4221194868	6.86E-07	1.4221188164	1.60E-08	1.4221187865	1.39E-08
0,7	1.7137527075	1.7137537221	1.01E-06	1.7137527390	3.16E-08	1.7137526895	1.80E-08
0,8	2.0255409285	2.0255423329	1.40E-06	2.0255409789	5.04E-08	2.0255409058	2.27E-08
0,9	2.3596031112	2.3596049762	1.86E-06	2.3596031839	7.28E-08	2.3596030829	2.83E-08
1,0	2.7182818285	2.7182842353	2.41E-06	2.7182819278	9.93E-08	2.7182817938	3.47E-08

Dari tabel diatas, terlihat bahwa metode Adams-Bashforth-Moulton ordo lima lebih akurat dari ordo empat, akan tetapi kurang akurat dibandingkan dengan metode Runge-Kutta ordo lima. Metode Adam-Bashforth-Moulton ordo lima memberikan alternatif metode dalam mendapatkan solusi dengan tingkat ketelitian yang lebih tinggi dengan jumlah komputasi yang lebih sedikit dibanding dengan metode Runge-Kutta ordo lima.

Daftar Pustaka

[1] Conte, S.D. dan De Boor, C., 2001, ”*Dasar-Dasar Analisa Numerik”*. Wayne Anderson, Makassar.

[2] Kreyszig, E., 1993, *“Advanced Engineering Mathematics*”.Wayne Anderson, Singapore.

[3] Kusuma, J. dan Muhtar, 2006, ”Metode Runge–Kutta orde lima untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa*”, Jurusan Matematika FMIPA Unhas*, Makassar.

[4] McCracken, D.D. dan. Dorn, W.S., 1986 ”*Studi Kasus Metode Numerik dengan Fortran IV, terj.Farida Muchtadi*”. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[5] Munir, R., 2003, ”*Metode Numerik”.*PenerbitInformatika, Bandung.

[6] Purcell, E.J., dan Varberg, D., 1987, ”*Kalkulus dan Geometri Analitis*”. Penerbit Erlangga, Jakarta.