

Local Stability of Equilibrium Point of the Tuberculosis Transmission Model

Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Model Transmisi Penyakit Tuberkulosis

Katarina Lodia Tutuop^{1*}, Joko Harianto^{2**}

*Program Studi Ilmu Kesehatan Masyarakat FKM Universitas Cenderawasih, Papua

**Program Studi Matematika FMIPA Universitas Cenderawasih, Papua

Email address: lodiatutuop26@gmail.com¹, joharijpr88@gmail.com²

Received: 6 March 2023; Accepted: 2 April 2023; Published: 5 May 2023

Abstract

A crucial part of illness prevention over the past few decades has been played by mathematical models. The dynamic system can be used to characterize the TB infection process. For the purpose of developing future prevention strategies, it is crucial to comprehend the effect of vaccination approach on the control of TB. We investigated the impact of vaccination strategies on TB disease transmission through a dynamic model. The model discussed involves logistical population growth. The purpose of this discussion is to analyze the local stability of the equilibrium point of the TB disease transmission model. Numerical simulations are provided to illustrate the theoretical results. The existence and local stability of the model equilibrium point depends on the basic reproduction number analytically. Based on secondary data, the basic reproduction number values are 0.98 and 4.12, respectively. Numerical simulations for these two values support the analysis results obtained. If the basic reproduction number is less than one, then the transmission of TB disease can be eradicated. However, if the basic reproduction number is more than one, the vaccination strategy is not sufficient to control TB transmission.

Keywords: Local Stability, TB Disease, Basic Reproduction Number

Abstrak

Model matematika beberapa dekade terakhir memainkan peran penting dalam pengendalian suatu penyakit. Dinamika sistem dapat menggambarkan proses penularan penyakit tuberkulosis (TB). Pengaruh strategi vaksinasi terhadap penularan penyakit TB penting untuk dipahami dalam rangka pengembangan strategi pencegahan di masa depan. Kami menyelidiki dampak strategi vaksinasi pada penularan penyakit TB melalui model dinamis. Model yang dibahas melibatkan pertumbuhan penduduk secara logistik. Tujuan pembahasan ini adalah menganalisis kestabilan lokal titik ekuilibrium model penularan penyakit TB. Simulasi numerik



diberikan untuk mengilustrasikan hasil teoritis. Eksistensi dan kestabilan lokal titik ekuilibrium model bergantung pada bilangan reproduksi dasar secara analitik. Berdasarkan data sekunder diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar masing-masing sebesar 0,98 dan 4,12. Simulasi numerik untuk dua nilai tersebut mendukung hasil analisis yang diperoleh. Jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu maka penularan penyakit TB dapat diberantas akan tetapi, sebaliknya jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu maka strategi vaksinasi yang dilakukan belum cukup untuk mengendalikan penularan penyakit TB.

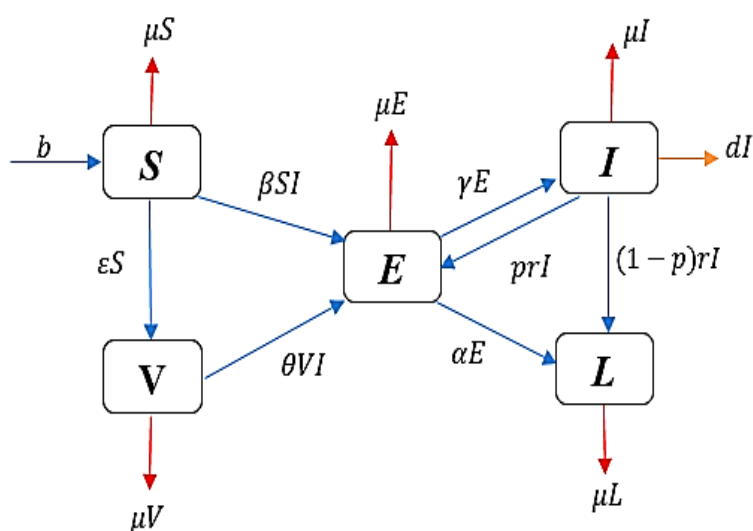
Kata kunci: Kestabilan Lokal, Penyakit TB, Bilangan Reproduksi Dasar

1. PENDAHULUAN

Tuberkulosis (TB) masih menjadi masalah kesehatan global yang utama. Penyakit ini merupakan salah satu dari sepuluh penyebab utama kematian dan agen infeksi utama di samping HIV/AIDS. Indonesia merupakan salah satu negara berkembang yang terkena epidemi TB. Indonesia memiliki jumlah kasus TB tertinggi ketiga di dunia setelah India dan Cina, dengan jumlah sekitar 10.000 kasus di seluruh dunia. Berdasarkan laporan global TB tahun 2021, sekitar 824.000 kasus TBC diperkirakan terjadi di Indonesia. Pasien TBC hanya sekitar 393.323 atau 48% yang berhasil ditemukan, diobati, dan dilaporkan dalam sistem informasi nasional. Kurang lebih sekitar 52% kasus TBC yang belum ditemukan atau mungkin sudah ditemukan tetapi belum dilaporkan. Pada tahun 2022 angka keberhasilan pengobatan TBC sebesar 74% masih dibawah target per tahun sebesar 90% (data per bulan September 2022). Model matematika beberapa dekade terakhir memainkan peran penting dalam pengendalian suatu penyakit. Model matematika pertama untuk masalah dinamika transmisi tuberkulosis diperkenalkan dalam artikel [19]. Populasi diklasifikasikan oleh mereka menjadi 3 kelas dan dimodelkan menurut gambaran epidemiologi infeksi TB. Sistem persamaan diferensial banyak digunakan dalam mempelajari penyebaran penyakit TB. Lima model matematika berbeda dikonstruksi untuk mempelajari penularan penyakit TB dan untuk membantu memberantas penyakit tersebut [15]. Penyesuaian data memberikan kombinasi yang tepat antara analisis teoritis dan situasi di lapangan. Data demografi dan epidemiologi telah digunakan untuk mengeksplorasi efek pertumbuhan penduduk, ketidakteraturan, pengelompokan kontak dan struktur usia pada dinamika penularan TB [1]. Saat ini beberapa artikel terkait model matematika penularan penyakit TB dikembangkan melalui banyak faktor. Faktor-faktor yang dipertimbangkan dalam model antara lain kecepatan penularan [17], resisten terhadap obat [3], infeksi berulang [5]-[8], koinfeksi [16], migrasi dan musiman [9],[21]. Selain itu, dipertimbangkan juga faktor pencegahan penyakit TB dengan adanya tindakan isolasi [2], pengobatan [12], vaksinasi [4],[11], dan strategi kontrol penularan penyakit TB [10],[13],[20]. Nkamba, et. al. dalam artikelnya membahas kelemahan strategi pencegahan penularan penyakit TB melalui vaksinasi massal. Populasi diklasifikasikan menjadi 5 kompartemen, yaitu kompartemen rentan, divaksin, terpapar resiko rendah, terpapar resiko tinggi dan terinfeksi (model berbasis SVEIL). Hasil yang diperoleh adalah penyakit TB dapat diberantas jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu akan tetapi, pertumbuhan penduduk pada model tersebut diasumsikan meningkat secara eksponensial [14]. Faktanya, Verhulst berpendapat bahwa pertumbuhan penduduk tidak selalu bertambah secara eksponensial. Model yang lebih akurat untuk mendeskripsikan penularan penyakit TB baik secara kuantitatif maupun kualitatif dapat diperoleh dengan melibatkan pertumbuhan penduduk secara logistik [18]. Oleh karena itu, diperlukan pembahasan terkait model penularan penyakit TB yang melibatkan pertumbuhan penduduk secara logistik. Hingga saat ini belum ada pembahasan model berbasis SVEIL yang melibatkan pertumbuhan penduduk secara logistik untuk masalah penularan penyakit TB. Dengan demikian, tujuan dari pembahasan ini adalah menganalisis kestabilan lokal titik ekuilibrium model penularan penyakit TB berbasis SVEIL yang melibatkan pertumbuhan penduduk secara logistik.

Total populasi dalam waktu t dinotasikan dengan $N(t)$. Populasi dibedakan menjadi lima kelas epidemiologi, yaitu kelas rentan, kelas divaksin, kelas terpapar resiko tinggi, kelas terinfeksi

dan kelas terpapar resiko rendah. Jumlah populasi pada kelas rentan dalam waktu t dinotasikan dengan $S(t)$. Jumlah populasi pada kelas divaksin dalam waktu t dinotasikan dengan $V(t)$. Jumlah populasi pada kelas terpapar resiko tinggi dalam waktu t dinotasikan dengan $E(t)$. Jumlah populasi pada kelas terinfeksi dalam waktu t dinotasikan dengan $I(t)$. Jumlah populasi pada kelas terpapar resiko rendah dalam waktu t dinotasikan dengan $L(t)$. Pertumbuhan populasi yang rentan terhadap penyakit TB diasumsikan mengikuti pertumbuhan logistik. Diasumsikan juga bahwa kelas terinfeksi atau terpapar resiko rendah maupun tinggi tidak berkontribusi terhadap kelahiran dan kematian di kelas rentan. Asumsi yang digunakan untuk memenuhi syarat dan memperjelas peristiwa yang dimodelkan meliputi: populasi tertutup (tidak ada migrasi), kelahiran pada setiap kelas masuk pada kelas rentan S , kematian alami terjadi dengan laju yang sama untuk semua kelas, jika orang yang terinfeksi mendapat pengobatan, maka kondisinya dapat berubah menjadi terpapar beresiko tinggi atau beresiko rendah, pengobatan rutin yang diberikan pada orang yang terpapar beresiko tinggi akan mengubah kondisinya menjadi terpapar beresiko rendah, penularan penyakit TB terjadi melalui kontak antara orang yang terinfeksi dengan yang rentan. Orang yang rentan ada kemungkinan diberikan vaksin yang tidak sempurna yang mengurangi kerentanannya terhadap penyakit TB. Dengan demikian, kelas divaksin V (orang-orang yang divaksinasi) dianggap sebagai kelas yang rentan. Berikut ini diberikan diagram skematik model berbasis SVEIL untuk masalah transmisi penyakit TB.



Gambar 1.1. Diagram skematik model berbasis SVEIL untuk masalah transmisi penyakit TB

Berdasarkan asumsi, pemisalan parameter dan Gambar 1.1, diperoleh bentuk persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta SI - \varepsilon S \\ \frac{dV}{dt} &= \varepsilon S - \theta VI - \mu V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI + \theta VI + prI - (\alpha + \gamma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + r + d)I \\ \frac{dL}{dt} &= (1 - p)rI + \alpha E - \mu L \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

dengan nilai awal non negatif dan $N = S + E + I + L$. Laju pertumbuhan intrinsik kelas rentan dinotasikan dengan b . Daya tampung kelas rentan dalam suatu wilayah dinotasikan dengan K . Laju cakupan vaksinasi dinotasikan dengan ε . Laju kontak antara kelas divaksin dan terinfeksi dinotasikan dengan θ . Parameter μ adalah laju kematian alami pada setiap kelas. Laju kontak orang yang rentan penyakit TB dengan orang yang terinfeksi penyakit TB sebesar β . Pengobatan orang-orang pada kelas terpapar resiko tinggi diberikan dengan ukuran sebesar α . Kondisi pasien terpapar resiko tinggi yang tidak mendapat pengobatan secara maksimal akan menjadi terinfeksi penyakit TB dengan laju sebesar γ . Pasien terinfeksi penyakit TB diberikan pengobatan dengan ukuran sebesar r . Kemudian pasien-pasien terinfeksi penyakit TB yang menyelesaikan pengobatannya secara teratur diukur dengan laju sebesar $(p - 1)r$, $0 < p < 1$. Pasien yang sembuh kondisinya menjadi orang yang terpapar beresiko rendah karena pengobatan tidak seratus persen dapat membasmi bakteri TB dalam tubuhnya. Oleh karena itu, pasien-pasien yang sembuh dan orang-orang terpapar beresiko rendah diklasifikasikan menjadi satu kelas saja, yaitu kelas terpapar beresiko rendah. Laju kematian akibat terinfeksi penyakit TB dinotasikan dengan d . Dalam hal ini, semua parameter model yang dinotasikan bernilai positif.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Jika dimisalkan $P = (S^*, V^*, E^*, I^*, L^*)$ adalah titik ekuilibrium Sistem (1), maka

$$bS^* \left(1 - \frac{S^*}{K}\right) - \beta S^* I^* - \varepsilon S^* = 0$$

$$\varepsilon S^* - \theta V^* I^* - \mu V^* = 0$$

$$\beta S^* I^* + \theta V^* I^* + prI^* - (\alpha + \gamma + \mu)E^* = 0 \quad (2.1)$$

$$\gamma E^* - (\mu + r + d)I^* = 0 \quad (2.2)$$

$$(1 - p)rI^* + \alpha E^* - \mu L^* = 0$$

Dari Persamaan (2.1) diperoleh

$$E^* = \frac{\mu + r + d}{\gamma} I^*$$

Jika E^* disubstitusikan ke Persamaan (2.2), maka diperoleh

$$\left(\beta S^* + \theta V^* - \frac{mn}{\gamma} + pr\right) I^* = 0 \quad (2.3)$$

Dengan $m = \alpha + \gamma + \mu$, $n = \mu + r + d$. Berdasarkan Persamaan (2.3), perolehan I^* dapat dibagi menjadi dua kasus, yaitu $I^* = 0$ dan $I^* \neq 0$. kasus $I^* = 0$ diperoleh dua titik ekuilibrium Sistem

(1.1), yaitu $P_0(0, 0, 0, 0, 0)$ dan $P_1\left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0\right)$. Titik ekuilibrium P_0 merupakan solusi trivial untuk Sistem (1.1). P_0 secara fisis berarti bahwa populasi manusia pada akhirnya akan musnah. Dengan demikian, P_0 tidak dianalisis dalam pembahasan ini. P_1 secara fisis diartikan sebagai suatu keadaan dengan jumlah populasi yang rentan penyakit TB sebanyak $\frac{(b-\varepsilon)K}{b}$ dan tidak ada yang terpapar dengan resiko rendah, tinggi bahkan terinfeksi. Titik ekuilibrium P_1 dikatakan sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit karena secara fisis artinya tidak ada pasien terinfeksi, tidak ada pasien terpapar resiko tinggi dan tidak ada pasien terpapar resiko rendah (bernilai nol). Kasus $I^* \neq 0$ diperoleh $P^* = (S^*, V^*, E^*, I^*, L^*)$ dengan

$$S^* = \frac{\mu(mn - \gamma pr)}{\gamma(\beta\mu + \varepsilon\theta)}$$

$$V^* = \frac{\varepsilon}{\mu} S^*$$

$$E^* = \frac{n}{\gamma} I^*$$

$$I^* = \frac{b - \varepsilon}{\beta} - \frac{b\mu(mn - \gamma pr)}{\beta K \gamma (\beta\mu + \varepsilon\theta)}$$

$$L^* = \left(\frac{\gamma(1-p)r + \alpha n}{\mu\gamma} \right) I^*$$

$$m = \alpha + \gamma + \mu \text{ dan } n = \mu + r + d.$$

Bilangan reproduksi dasar \mathfrak{R}_0 merupakan rata-rata jumlah kasus infeksi baru yang disebabkan oleh pasien terinfeksi melakukan kontak dengan seseorang dari kelas rentan (Henson, Brauer, & Castillo-Chavez, 2003). Castillo-Chavez, et. al. (2003) menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan *the next generation method*.

Jika dimisalkan *the vektor of new generated infected and the vektor of transfers between compartments* masing-masing sebagai berikut

$$\mathcal{F} = (\beta SI + \theta VI + prI, \gamma E, (1-p)rI + \alpha E)^T$$

$$\mathcal{V} = (-(\alpha + \gamma + \mu)E, -(\mu + r + d)I, -\mu L)^T$$

Matriks Jacobian dari \mathcal{F} dan \mathcal{V} di titik $P_1 = \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0\right)$ adalah

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K(\beta\mu + \theta\varepsilon)(b - \varepsilon)}{b\mu} + pr & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ \alpha & (1-p)r & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Sehingga *the next generation matrix* untuk Sistem (1.1), yaitu

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K(\beta\mu + \theta\varepsilon)(b - \varepsilon) + prb\mu}{b\mu n} & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{(1-p)r}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

Bilangan reproduksi dasar untuk Sistem (1.1) merupakan radius spektral dari V^{-1} , yaitu

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma\beta K b\mu + \mu pr\gamma - K\varepsilon\beta\mu\gamma - K\varepsilon\theta(\varepsilon - b)\gamma}{b\mu mn}}$$

Hubungan antara bilangan reproduksi dasar dan I^* dapat ditulis sebagai berikut:

$$I^* = \frac{b\mu mn}{\beta K\gamma(\beta\mu + \varepsilon\theta)} (\mathfrak{R}_0^2 - 1)$$

Sehingga diperoleh

$$E^* = \frac{b\mu mn^2}{\beta K\gamma^2(\beta\mu + \varepsilon\theta)} (\mathfrak{R}_0^2 - 1)$$

dan

$$L^* = \frac{(\gamma(1-p)r + \alpha n)b\mu mn}{\beta\mu K\gamma^2(\beta\mu + \varepsilon\theta)} (\mathfrak{R}_0^2 - 1)$$

Keterkaitan eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik dari Sistem (1.1) dengan bilangan reproduksi dasarnya, yaitu jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka terdapat satu titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $P_1 \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0 \right)$. Sebaliknya, jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka terdapat dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $P_1 \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0 \right)$ dan titik ekuilibrium endemik $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, L^*)$.

Berikut ini dibahas analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik Sistem (1). Sistem (1) dapat direduksi menjadi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta SI - \varepsilon S \\ \frac{dV}{dt} &= \varepsilon S - \theta VI - \mu V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI + \theta VI + prI - (\alpha + \gamma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + r + d)I \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik ditentukan dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian Sistem (2.4). Secara umum, matriks Jacobian Sistem (2.4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & -\beta S \\ \varepsilon & -(\theta I + \mu) & 0 & -\theta V \\ \beta I & \gamma I & -m & \beta S + \theta V + pr \\ 0 & 0 & \gamma & -n \end{bmatrix}$$

dengan $l_{11} = -\beta I - (\mu + \varepsilon)$. Oleh karena itu, hasil analisis kestabilan lokal titik-titik ekuilibrium Sistem (1.1) dapat disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.1. Titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (1.1), yaitu $P_1 \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0 \right)$ stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ dengan

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma\beta K b \mu + \mu p r \gamma - K \varepsilon \beta \mu \gamma - K \varepsilon \theta (\varepsilon - b) \gamma}{b \mu (\alpha + \gamma + \mu) (\mu + r + d)}}$$

Bukti:

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $P_1 \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0 \right)$, yaitu

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} j_{11} & 0 & 0 & j_{14} \\ \varepsilon & -\mu & 0 & j_{24} \\ 0 & 0 & -m & j_{34} \\ 0 & 0 & \gamma & -n \end{bmatrix}$$

dengan

$$j_{11} = -(\mu + \varepsilon), j_{14} = -\frac{(b - \varepsilon)\beta K}{b},$$

$$j_{24} = -\frac{(b - \varepsilon)\theta \varepsilon K}{\mu b},$$

$$j_{34} = \frac{K(\beta \mu + \theta \varepsilon)(b - \varepsilon)}{b \mu} + p r$$

Persamaan karakteristik dari $J(P_1)$, yaitu

$$(\lambda + \mu + \varepsilon)(\lambda + \mu)(\lambda^2 + c_1 \lambda + c_0) = 0 \quad (2.5)$$

dengan

$$c_1 = \alpha + \gamma + \mu + \mu + r + d > 0$$

$$c_0 = b \mu (\alpha + \gamma + \mu) (\mu + r + d) - \frac{K \gamma (\beta \mu + \theta \varepsilon) (b - \varepsilon)}{b \mu} - \gamma p r$$

Jika dalam Persamaan (2.5) melibatkan bilangan reproduksi dasar, maka diperoleh

$$(\lambda + \mu + \varepsilon)(\lambda + \mu)(\lambda^2 + b_1 \lambda + b_0) = 0 \quad (2.6)$$

dengan $m = \alpha + \gamma + \mu$, $n = \mu + r + d$, $b_1 = m + n$, $b_0 = -b \mu m n (\mathfrak{R}_0^2 - 1)$. Dari Persamaan (2.6) diperoleh dua nilai eigen $J(P_1)$, yaitu $\lambda_1 = -(\mu + \varepsilon) < 0$ dan $\lambda_2 = -\mu < 0$. Sedangkan dua nilai eigen $J(P_1)$ lainnya bergantung pada bilangan reproduksi dasar \mathfrak{R}_0 . Jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka menurut kriteria Ruth-Hurtwiz persamaan karakteristik $\lambda^2 + (m + n)\lambda - b \mu m n (\mathfrak{R}_0^2 - 1) = 0$ memiliki dua nilai eigen bernilai negatif. Berdasarkan Perko, jika semua nilai eigen matriks $J(P_1)$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $P_1 \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0 \right)$ stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, maka terdapat nilai eigen $J(P_1)$ yang bernilai positif akibatnya titik ekuilibrium $P_1 \left(\frac{(b-\varepsilon)K}{b}, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)K}{\mu b}, 0, 0, 0 \right)$ tidak stabil.

Teorema 2.2. Pendekatan numerik menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik dari Sistem (1.1), yaitu $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, L^*)$ stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, dengan

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma\beta K b \mu + \mu p r \gamma - K \varepsilon \beta \mu \gamma - K \varepsilon \theta (\varepsilon - b) \gamma}{b \mu (\alpha + \gamma + \mu) (\mu + r + d)}}$$

$$S^* = \frac{\mu(mn - \gamma pr)}{\gamma(\beta\mu + \varepsilon\theta)} > 0$$

$$V^* = \frac{\varepsilon}{\mu} S^*$$

$$E^* = \frac{n}{\gamma} I^*$$

$$I^* = \frac{b - \varepsilon}{\beta} - \frac{b\mu(mn - \gamma pr)}{\beta K \gamma (\beta\mu + \varepsilon\theta)}$$

$$L^* = \left(\frac{\gamma(1-p)r + \alpha n}{\mu\gamma} \right) I^*$$

$m = \alpha + \gamma + \mu$ dan $n = \mu + r + d$.

Bukti:

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $P^* = (S^*, V^*, E^*, I^*)$, yaitu

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & -\beta S^* \\ \varepsilon & -\mu & 0 & -\theta V^* \\ 0 & 0 & -(\alpha + \gamma) & \beta S^* + \theta V^* + pr \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + r + d) \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $J(P^*)$, yaitu

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (2.7)$$

Diperhatikan pada Persamaan (2.7), berdasarkan kriteria Ruth-Hurtwitz semua nilai eigen dari $J(P^*)$ bernilai negatif jika $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$. Kestabilan lokal titik ekuilibrium $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, L^*)$ tidak dimungkinkan untuk ditentukan secara analitik karena semua koefisien Persamaan (2.7) sangatlah kompleks sehingga kestabilan lokal titik ekuilibrium $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, L^*)$ ditentukan melalui pendekatan numerik. Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 diperoleh $a_1 = 6,11, a_2 = 5,21, a_3 = 0,24, a_4 = 0,003$ sehingga $a_1 a_2 a_3 = 7,86$ lebih dari $a_3^2 + a_1^2 a_4 = 0,19$. Jika dihitung nilai eigen $J(P^*)$ diperoleh $\lambda_1 = -0,96, \lambda_2 = -5,09, \lambda_{3,4} = -0,02 \pm 0,01i$. Jadi terbukti bahwa titik ekuilibrium P^* stabil asimtotik lokal secara numerik jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ dengan menggunakan parameter pada Tabel 2.1.

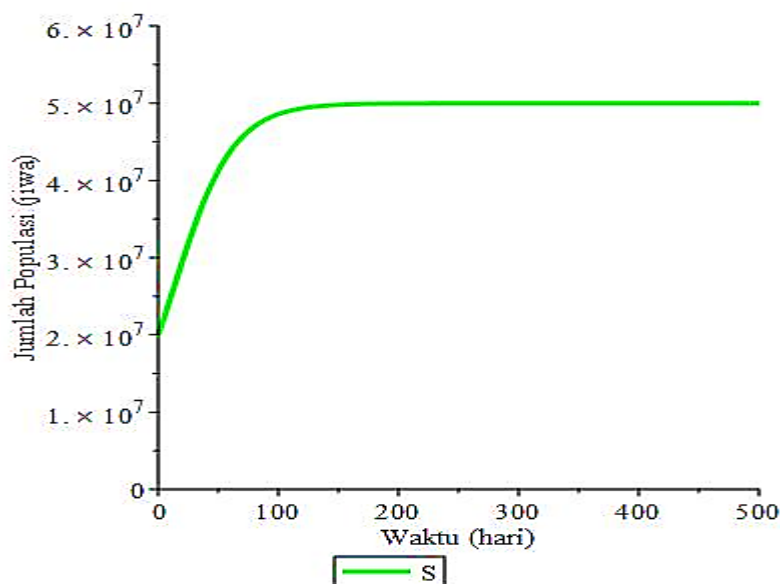
Berdasarkan Tabel 2.1 untuk kasus $\mathfrak{R}_0 < 1$ diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar Sistem (1.1) sebesar 0,98. Titik ekuilibrium yang diperoleh dari nilai parameter tersebut untuk Sistem (1.1) hanya satu (tunggal), yaitu titik ekuilibrium non endemik $P_1(49999875,249,0,0,0)$.

Tabel 2.1. Nilai Parameter Sistem (1.1)

Parameter	Estimasi (per tahun)	Sumber
-----------	----------------------	--------

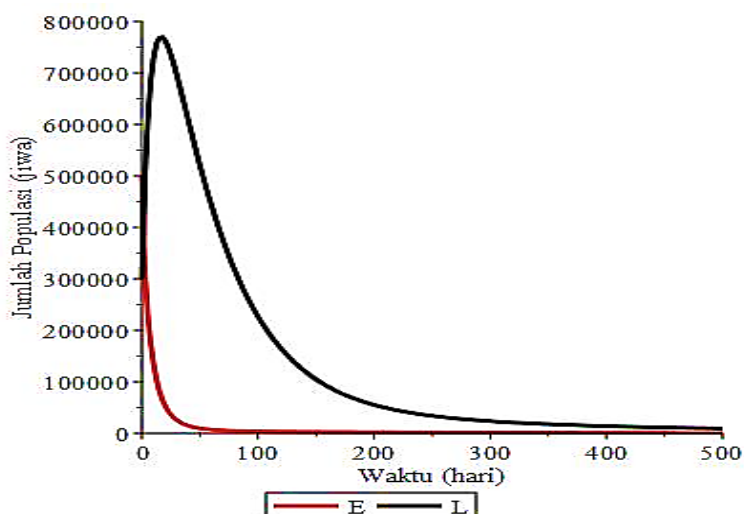
	$\mathfrak{R}_0 < 1$	$\mathfrak{R}_0 > 1$	
ε	10^{-7}	10^{-4}	Asumsi
θ	5×10^{-7}	5×10^{-4}	Asumsi
b	0,04	0,04	(Kim et al., 2018)
β	$1,5 \times 10^{-7}$	$1,5 \times 10^{-7}$	(Mengistu and Witbooi, 2019)
μ	0,02	0,02	(Kim et al., 2018)
α	0,2	0,2	(Kim et al., 2018)
γ	0,023	0,023	(Mengistu and Witbooi, 2019)
p	0,2	0,2	(Kim et al., 2018)
r	0,546	0,546	(Mengistu and Witbooi, 2019)
d	0,17	0,17	(Mengistu and Witbooi, 2019)

Hasil simulasi numerik dengan menggunakan software Maple berupa grafik hubungan jumlah kelas yang rentan, yang divaksin, terpapar beresiko rendah, tinggi, dan terinfeksi terhadap variabel waktu dengan nilai awal jumlah individu rentan, yang divaksin, terpapar beresiko rendah, tinggi, dan terinfeksi berturut-turut sebesar 20 juta jiwa, 1000 jiwa, 300.000 jiwa, 500.000 jiwa, 1000 jiwa. Daya tampung (K) diasumsikan sebesar 50 juta jiwa.



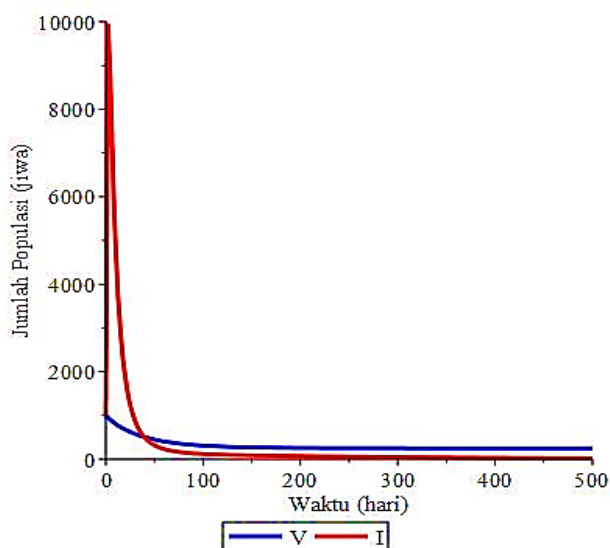
Gambar 2.1. Dinamika populasi yang rentan saat $\mathfrak{R}_0 < 1$

Gambar 2.1 menunjukkan bahwa jumlah kelas rentan konvergen ke angka 49.999.875 jiwa sampai waktu $t = 500$.



Gambar 2.2. Dinamika populasi terpapar beresiko tinggi dan rendah saat $\mathcal{R}_0 < 1$

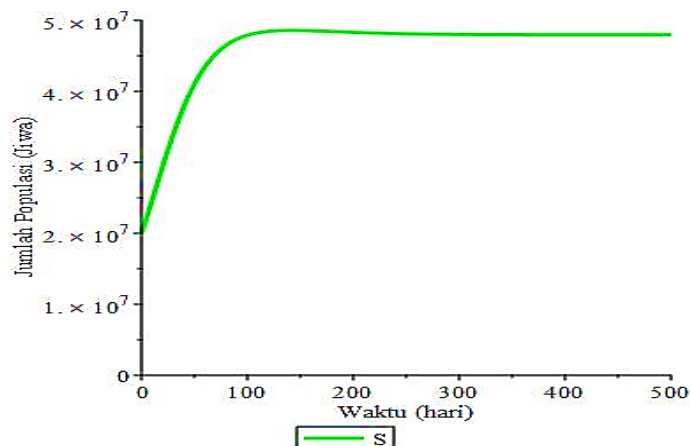
Gambar 2.2 menunjukkan jumlah kelas yang beresiko rendah dan tinggi berturut-turut konvergen ke angka nol sampai waktu $t = 500$.



Gambar 2.3. Dinamika populasi yang divaksin dan terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 < 1$

Gambar 2.3 menunjukkan jumlah kelas yang divaksin konvergen ke angka 249 jiwa sedangkan jumlah kelas terinfeksi konvergen ke angka nol sampai waktu $t = 500$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi Sistem (1.1) konvergen ke titik ekuilibrium bebas penyakit $P_1(49999875, 249, 0, 0, 0)$ untuk t menuju tak hingga. Interpretasi biologisnya, yaitu jika bilangan reproduksi dasarnya kurang

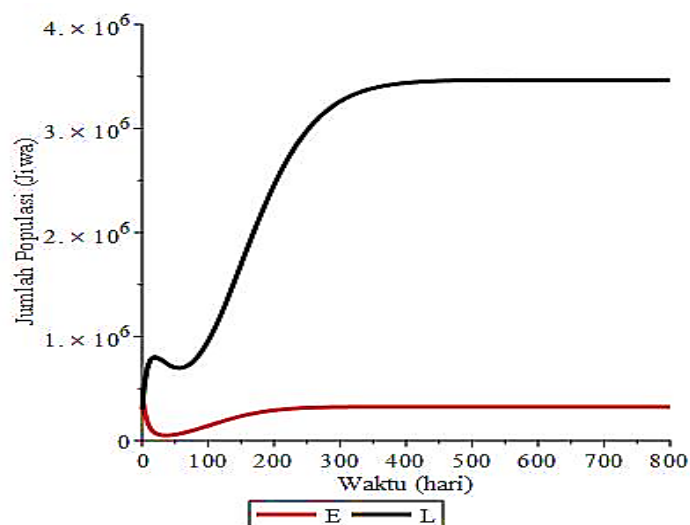
dari angka 1 maka transmisi penyakit tuberkulosis dalam populasi akan berhenti seiring dengan berjalannya waktu.



Gambar 2.4. Dinamika populasi rentan saat $\mathcal{R}_0 > 1$

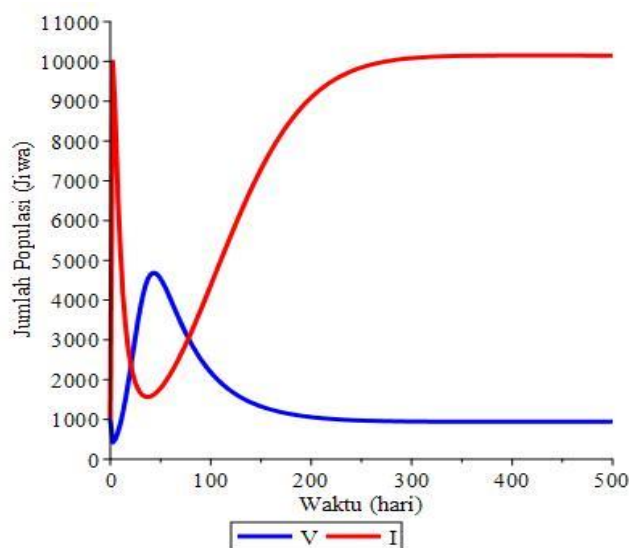
Berdasarkan Tabel 2.1 untuk kasus $\mathcal{R}_0 > 1$ diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar Sistem (1.1) sebesar 4,12. Titik ekuilibrium yang diperoleh dari nilai parameter tersebut untuk Sistem (1.1), yaitu titik ekuilibrium non endemik $P_1(49875000, 249375, 0, 0, 0)$ dan titik ekuilibrium endemik $P^*(47972477, 941, 324697, 10146, 3468577)$. Nilai awal yang digunakan untuk jumlah individu rentan, yang divaksin, terpapar beresiko rendah, tinggi, dan terinfeksi berturut-turut sebesar 20 juta jiwa, 1000 jiwa, 300.000 jiwa, 500.000 jiwa, 1000 jiwa.

Gambar 2.4 menunjukkan bahwa jumlah kelas rentan nilainya konvergen ke angka 49.875.000 jiwa sampai waktu $t = 500$. Gambar 2.5 menunjukkan bahwa jumlah kelas terpapar beresiko rendah dan tinggi berturut-turut konvergen ke angka 324.697 jiwa dan 3.468.577 jiwa sampai waktu $t = 500$.



Gambar 2.5. Dinamika populasi terpapar beresiko rendah dan tinggi saat $\mathcal{R}_0 > 1$

Gambar 2.6 menunjukkan bahwa jumlah kelas yang divaksin dan terinfeksi konvergen berturut-turut ke angka 941 jiwa dan 10.146 jiwa sampai waktu $t = 500$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi Sistem (1.1) konvergen ke titik ekuilibrium endemik $P^*(47972477, 941, 324697, 10146, 3468577)$ untuk t menuju tak hingga. Dengan kata lain, titik ekuilibrium endemik P^* stabil asimtotik lokal secara numerik untuk nilai parameter dan nilai awal tertentu. Interpretasi biologisnya, yaitu jika bilangan reproduksi dasarnya lebih dari angka 1 maka transmisi penyakit tuberkulosis dalam populasi akan tetap terjadi di dalam populasi untuk waktu yang tak terhingga.



Gambar 2.6. Dinamika populasi yang divaksin dan terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 > 1$

3. KESIMPULAN

Model transmisi penyakit tuberkulosis dengan melibatkan pertumbuhan logistik dikonstruksi dalam bentuk sistem persamaan diferensial berbasis SVEIL dengan menambahkan parameter daya tampung (K) dalam model tersebut. Parameter daya tampung mempengaruhi bilangan reproduksi dasar dari model tersebut. Eksistensi titik ekuilibrium model tersebut bergantung pada bilangan reproduksi dasarnya. Titik ekuilibrium sistem (SVEIL) dipengaruhi oleh parameter daya tampung, namun kestabilannya masih belum berpengaruh secara signifikan jika dikaitkan dengan bilangan reproduksi dasarnya. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium non endemik masih stabil asimtotik lokal seperti pada umumnya jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu. Simulasi numeriknya juga mendukung hasil analisis tersebut. Akan tetapi, jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu maka simulasi numerik dengan parameter dan nilai awal tertentu menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik masih stabil asimtotik lokal. Interpretasi biologisnya, yaitu jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu, maka transmisi penyakit tuberkulosis akan terus terjadi dalam populasi sampai waktu yang tak terhingga. Sebaliknya jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, maka transmisi penyakit tuberkulosis akan cenderung menurun dalam populasi dalam kurun waktu tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aparicio, J. P., & Castillo-Chavez, C., 2009. Mathematical modelling of tuberculosis epidemics. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 6(2). <https://doi.org/10.3934/mbe.2009.6.209>
- [2] Blower, S. M., Small, P. M., & Hopewell, P. C., 1996. Control strategies for tuberculosis epidemics: New models for old problems. *Science*, 273(5274). <https://doi.org/10.1126/science.273.5274.497>
- [3] Blower, Sally M., & Chou, T., 2004. Modeling the emergence of the “hot zones”: Tuberculosis and the amplification dynamics of drug resistance. *Nature Medicine*, 10(10). <https://doi.org/10.1038/nm1102>
- [4] Castillo-Chavez, C., & Feng, Z., 1998. Global stability of an age-structure model for TB and its applications to optimal vaccination strategies. *Mathematical Biosciences*, 151(2). [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(98\)10016-0](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(98)10016-0)
- [5] Das, D. K., Khajanchi, S., & Kar, T. K., 2020. Transmission dynamics of tuberculosis with multiple re-infections. *Chaos, Solitons and Fractals*, 130. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109450>
- [6] Henson, S. M., Brauer, F., & Castillo-Chavez, C., 2003. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. *The American Mathematical Monthly*, 110(3). <https://doi.org/10.2307/3647954>
- [7] Khajanchi, S., Das, D. K., & Kar, T. K., 2018. Dynamics of tuberculosis transmission with exogenous reinfections and endogenous reactivation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 497. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.01.014>
- [8] Kim, S., de los Reyes, A. A., & Jung, E., 2018. Mathematical model and intervention strategies for mitigating tuberculosis in the Philippines. *Journal of Theoretical Biology*, 443, 100–112. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2018.01.026>
- [9] Liu, L., Zhao, X. Q., & Zhou, Y., 2010. A tuberculosis model with seasonality. *Bulletin of Mathematical Biology*, 72(4). <https://doi.org/10.1007/s11538-009-9477-8>
- [10] Liu, S., Yang, X., Bi, Y., & Li, Y., 2019. Dynamic behavior and optimal scheduling for mixed vaccination strategy with temporary immunity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 24(4). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018216>
- [11] Mengistu, A. K., & Witbooi, P. J., 2019. Modeling the Effects of Vaccination and Treatment on Tuberculosis Transmission Dynamics. *Journal of Applied Mathematics, Volume 201*, 1–9. <https://doi.org/10.1155/2019/7463167>
- [12] Mondal, P. K., & Kar, T. K., 2017. Optimal treatment control and bifurcation analysis of a tuberculosis model with effect of multiple re-infections. *International Journal of Dynamics and Control*, 5(2). <https://doi.org/10.1007/s40435-015-0176-z>
- [13] Nepomuceno, E. G., Takahashi, R. H. C., & Aguirre, L. A., 2018. Reducing vaccination level to eradicate a disease by means of a mixed control with isolation. *Biomedical Signal Processing and Control*, 40. <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2017.09.004>
- [14] Nkamba, L. N., Manga, T. T., Agouanet, F., & Manyombe, M. L. M., 2019. Mathematical model to assess vaccination and effective contact rate impact in the spread of tuberculosis. *Journal of Biological Dynamics*, 13(1). <https://doi.org/10.1080/17513758.2018.1563218>
- [15] Perko, L., 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition. Springer-Verlag, New York.
- [16] Pinto, E. R., Nepomuceno, E. G., & Campanharo, A. S. L. O., 2019. Influence of Contact Network Topology on the Spread of Tuberculosis. *Communications in Computer and Information Science*, 1068 CCIS. https://doi.org/10.1007/978-3-030-36636-0_6
- [17] Sharomi, O., Podder, C. N., Gumel, A. B., & Song, B., 2008. Mathematical analysis of the transmission dynamics of HIV/TB coinfection in the presence of treatment. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 5(1). <https://doi.org/10.3934/mbe.2008.5.145>
- [18] Song, B., Castillo-Chavez, C., & Aparicio, J. P., 2002. Tuberculosis models with fast and slow

- dynamics: The role of close and casual contacts. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2). [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00112-8](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00112-8)
- [19] Verhulst, 2006. Ordinary Differential Equations with Applications. In *Ordinary Differential Equations with Applications*. <https://doi.org/10.1007/0-387-35794-7>
- [20] Waaler, H., Geser, A., & Andersen, S., 1962. The use of mathematical models in the study of the epidemiology of tuberculosis. *American Journal of Public Health and the Nation's Health*, 52(6), 1002–1013. <https://doi.org/10.2105/AJPH.52.6.1002>
- [21] Yang, Y., Tang, S., Ren, X., Zhao, H., & Guo, C., 2016. Global stability and optimal control for a tuberculosis model with vaccination and treatment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 21(3). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1009>
- [22] Zhou, Y., Khan, K., Feng, Z., & Wu, J., 2008. Projection of tuberculosis incidence with increasing immigration trends. *Journal of Theoretical Biology*, 254(2). <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.05.026>