

## Mathematical Model of COVID-19 with Quarantine and Vaccination

### Model Matematika Penyebaran Covid-19 Dengan Karantina Dan Vaksinasi

Muhammad Rifki Nisardi<sup>1\*</sup>, Sulma<sup>2\*</sup>, Hukmah<sup>3\*</sup>, Suriani<sup>4\*</sup>, Syamsuddin Toaha<sup>5\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Program Studi Ilmu Aktuaria FSAINS-UM Bulukumba

<sup>\*\*</sup> Program Studi Magister Matematika FMIPA-UNHAS

**E-mail:** [muhammadrifkinisardi@umbulukumba.ac.id](mailto:muhammadrifkinisardi@umbulukumba.ac.id)<sup>1</sup>, [sulma@umbulukumba.ac.id](mailto:sulma@umbulukumba.ac.id)<sup>2</sup>, [hukmah@umbulukumba.ac.id](mailto:hukmah@umbulukumba.ac.id)<sup>3</sup>, [suriani@umbulukumba.ac.id](mailto:suriani@umbulukumba.ac.id)<sup>4</sup>, [syamsuddint@yahoo.com](mailto:syamsuddint@yahoo.com)<sup>5</sup>

Received: 26 August 2022; Accepted: 6 October 2022; Published: 5 January 2023

#### Abstract

We present a mathematical model of COVID-19 disease by modifying the SEIR model. The model considers two additional compartments, quarantine (Q) and vaccination (V) which aim to control the spread of COVID-19. Based on the model, we obtained a disease-free equilibrium point and an endemic equilibrium point. The basic reproduction numbers were calculated using the next-generation matrix method. In this model, we analyzed the stability conditions that must be satisfied by the defining parameters. We perform data on the spread of COVID-19 in Indonesia for estimation to provide the parameter value in the model. Based on the result, there is an influence of changes in several parameter values on the number of individuals infected with COVID-19.

**Keywords:** SEIR-VQ Model, Basic Reproduction Numbers, *Next Generation Matrix*.

#### Abstrak

Dalam penelitian ini, diberikan model matematika penyebaran penyakit COVID-19 dengan memodifikasi model SEIR. Model yang digunakan mempertimbangkan dua kompartemen tambahan yaitu karantina (Q) dan vaksinasi (V) sebagai usaha untuk mengendalikan penyebaran COVID-19. Berdasarkan model yang telah dibangun, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dihitung dengan menggunakan metode matriks *next generation*. Dalam model ini juga diperoleh syarat kestabilan yang harus dipenuhi oleh parameter yang telah didefinisikan. Data penyebaran COVID-19 di Indonesia digunakan untuk memberikan estimasi nilai parameter pada model. Berdasarkan analisa yang diperoleh, terdapat pengaruh dari perubahan beberapa nilai parameter terhadap jumlah individu terinfeksi COVID-19.

**Kata kunci:** Model SEIR-VQ, Bilangan Reproduksi Dasar, Matriks *Next Generation*.



## 1. PENDAHULUAN

COVID-19 atau Coronavirus-disease-2019 adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh suatu mutasi baru dari virus corona yang disebut sebagai “*Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2)*”. Virus ini diketahui pertama kali tercatat pada Desember 2019 di kota Wuhan, Republik Rakyat Tiongkok. Virus COVID-19 bertransmisi dari manusia ke manusia (*Human to Human*). Dalam proses penyebarannya, virus tersebut akan menginfeksi melalui droplet dari hidung ataupun mulut seseorang yang terinfeksi COVID-19 baik ketika bersin, batuk maupun ketika sedang berbicara dengan jarak yang terlalu dekat[1]. Sejak kemunculan virus tersebut, berbagai negara telah mencoba melakukan upaya untuk mengurangi transmisi virus dengan berbagai tindakan pencegahan. Hal tersebut juga dilakukan oleh Indonesia pada awal masa pandemik COVID-19. Pemerintah memberlakukan kebijakan untuk membatasi interaksi antar individu yang dikenal dengan istilah PSBB dan PPKM. Kemudian, masyarakat dihimbau untuk patuh pada protokol kesehatan yang berlaku, termasuk penggunaan masker dan menjaga kebersihan.

Beberapa model matematika mengenai pemodelan penyakit seperti *Susceptible-Infectious-Recovered* (SIR), *SEIR* dan *SEIRS* telah banyak digunakan untuk membantu menjelaskan berbagai macam jenis penyebaran penyakit disertai dengan asumsi-asumsi yang ada pada model tersebut. Contohnya adalah penyebaran penyakit TBC, Demam Berdarah (DBD) atau HIV-AIDS dan lain-lain. [3-7,12-13]. Model matematika mengenai penyebaran COVID-19 juga telah banyak diteliti oleh banyak peneliti yang mengkaji tentang dinamika penyebaran penyakit tersebut dalam populasi [2,8-11,14]. Pada artikel [1] peneliti mengkaji tentang penyebaran COVID-19 dengan mempertimbangkan *Social Distancing* dan *Rapid test*. Dalam penelitiannya, digunakan model SEIAR dengan membagi kompartemen terinfeksi tanpa gejala (A) menjadi dua subpopulasi yaitu individu terinfeksi tanpa gejala yang terdeteksi COVID-19 dan tidak terdeteksi.

Pada penelitian ini, model yang akan diangkat adalah model matematika SEIRQV dengan dengan mempertimbangkan kompartemen karantina (Q) dan vaksinasi (V) sebagai bentuk usaha dalam mengurangi penyebaran COVID-19 dalam populasi. Selain itu, akan ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik kemudian akan dilakukan analisa kestabilan lokal untuk setiap titik kesetimbangan yang diperoleh. Bilangan reproduksi dasar juga akan dihitung berdasarkan hasil estimasi parameter dari data real COVID-19 di Indonesia.

Dalam artikel ini terdiri dari beberapa sub bagian. Bagian 1 merupakan pendahuluan dari penelitian ini dan formulasi model matematika dengan mempertimbangkan skema karantina dalam populasi. Pada bagian 2 diperoleh hasil dan pembahasan dari penelitian ini. Selain itu, memuat estimasi parameter dan simulasi numerik dengan mempertimbangkan berbagai skenario untuk melihat pengaruh dari perubahan nilai parameter tersebut. Bagian 3 berisi kesimpulan dari penelitian ini.

Model penyebaran COVID-19 yang dibangun terdiri dari enam kompartemen. Setiap kompartemen merepresentasikan status kesehatan yang berbeda-beda satu sama lain. Kompartemen tersebut terdiri atas individu yang rentan dan belum mendapatkan vaksin (*S*); Individu rentan yang telah mendapatkan vaksin (*V*); Individu yang berada dalam masa inkubasi COVID-19 (*E*); Individu yang terinfeksi COVID-19 (*I*); Individu yang menjalani karantina (*Q*); Individu yang dinyatakan sembuh dari COVID-19 (*R*).

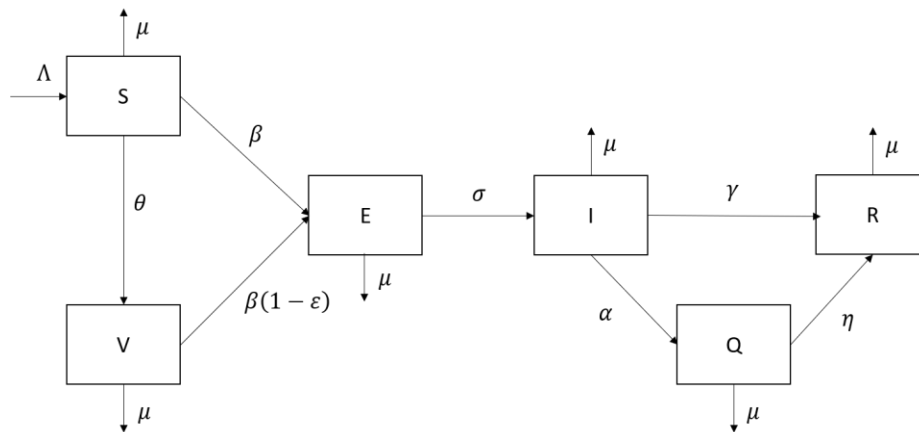
Individu yang berada dalam kompartemen *S* akan bertambah dikarenakan adanya kelahiran alami sebesar  $\Lambda$  dan akan berkurang dikarenakan adanya vaksinasi dengan tingkat  $\theta$ , adanya kematian alami dengan tingkat  $\mu$  serta adanya interaksi individu rentan dengan individu yang

terinfeksi dengan tingkat transmisi kontak sebesar  $\beta$  sehingga individu yang terinfeksi berpindah ke kompartemen  $E$ .

Kompartemen rentan yang telah mendapatkan vaksin  $V$  akan bertambah akibat adanya individu rentan yang telah mendapatkan proteksi vaksin dengan tingkat  $\theta$  dan akan berkurang dikarenakan adanya kematian alami serta perpindahan menuju kompartemen yang berada dalam periode inkubasi dikarenakan kontak dengan individu terinfeksi COVID-19. Individu yang telah mendapatkan vaksin, memiliki pengurangan resiko infeksi sebesar  $(1 - \varepsilon)$ , diman  $\varepsilon$  adalah tingkat efikasi vaksin yang digunakan.

Kompartemen  $E$  akan bertambah dikarenakan individu yang berpindah dari kompartemen  $S$  dan  $V$  setelah mengalami kontak dengan individu yang terinfeksi COVID-19. Setelah periode inkubasi berakhir, maka individu tersebut akan berpindah ke kompartemen  $I$  dengan tingkat perpindahan dari masa inkubasi ke infeksi sebesar  $\sigma$ . Kompartemen ini juga akan mengalami pengurangan dikarenakan adanya kematian alami.

Kompartemen terinfeksi  $I$  bertambah karena adanya individu yang selesai menjalani masa inkubasi COVID-19. Individu yang merasakan gejala akan diminta untuk menjalani karantina, baik secara mandiri maupun di fasilitas kesehatan yang telah disediakan dengan proporsi sebesar  $q$ . Individu yang terinfeksi dan tidak menjalankan karantina selanjutnya akan menjadi individu yang menyebabkan infeksi baru dan diasumsikan akan sembuh secara alami dengan tingkat kesembuhan  $\gamma$ . Selain itu, kompartemen ini akan berkurang ketika individunya mengalami kematian. Kompartemen karantina  $Q$  akan bertambah ketika adanya individu terinfeksi yang melaksanakan karantina dan akan berkurang ketika ada individu yang sembuh dengan tingkat kesembuhan sebesar  $\eta$ . Interaksi antar kompartemen dapat dilihat pada Gambar (1).



**Gambar 1.** Interaksi antar kompartemen model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi dan karantina

Berdasarkan asumsi dan bentuk hubungan yang telah diberikan, maka model matematika penyebaran COVID-19 dibangun sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \theta S - \beta(1-q)S \frac{I}{N} - \mu S, \\
 \frac{dV}{dt} &= \theta S - \beta(1-q)(1-\varepsilon)V \frac{I}{N} - \mu V, \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta(1-q)S \frac{I}{N} + \beta(1-q)(1-\varepsilon)V \frac{I}{N} - \sigma E - \mu E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma(1-q)I - q\alpha I - \mu I,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= q\alpha I - \mu Q - \eta Q, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma(1-q)I + \eta Q - \mu R.\end{aligned}$$

Setiap parameter yang digunakan diasumsikan bernilai positif.

Berikut diberikan definisi yang digunakan pada hasil yang diperoleh.

**Definisi 1.1** [6] *Normalisasi indeks sensitivitas diperoleh dengan normalisasi dari variabel  $V$  yang terdiferensial pada parameter  $p$ , didefinisikan sebagai berikut:*

$$C_p^V = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V},$$

dimana  $V$  adalah variabel yang akan dianalisis dengan  $p$  adalah parameter.

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 2.1. Analisis Solusi *Non-Negative* dan Keterbatasan Solusi

Sistem (1.1) merupakan sistem yang melibatkan interaksi antar populasi sehingga solusi dari sistem harus positif dan terbatas. Untuk Sistem (1.1) didefinisikan suatu feasible region  $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^6$  sedemikian sehingga  $\Omega = \{(S, V, E, I, Q, R) \in \mathbb{R}_+^6 : N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ .

**Teorema 2.1.** *Semua solusi dari Sistem (1.1) yang berada dalam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^6$  merupakan solusi yang non-negative dan terbatas.*

**Bukti:**

Pembuktian diawali dengan menunjukkan bahwa solusi pada Sistem (1.1) merupakan solusi yang *non-negative* dan terbatas. Pertama, Misalkan  $N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ , akan ditunjukkan bahwa solusi dari Sistem (1.1) *non-negative*. Pembuktian solusi *non-negative* akan diberikan dari poin a)-f).

a) Dari persamaan pertama dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \theta S - \beta(1-q)S \frac{I}{N} - \mu S \geq -\left(\theta + \beta(1-q)\frac{I}{N} + \mu\right)S.$$

Karena  $I(t) \leq N(t)$  diperoleh

$$\frac{dS}{dt} \geq -(\theta + \beta(1-q) + \mu)S = -k_1 S,$$

dengan  $k_1 = \theta + \beta(1-q) + \mu$ . Kemudian diperoleh

$$S(t) \geq S(0)e^{-k_1 t},$$

untuk  $t \rightarrow \infty$  mengakibatkan  $e^{-k_1 t} \rightarrow 0$ . Dengan kata lain

$$S(t) \geq 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty.$$

b) Dari persamaan kedua dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\frac{dV}{dt} = \theta S - \beta(1-q)(1-\varepsilon)V \frac{I}{N} - \mu V \geq -\left(\beta(1-q)(1-\varepsilon)\frac{I}{N} + \mu\right)V.$$

Karena  $I(t) \leq N(t)$  diperoleh

$$\frac{dV}{dt} \geq -(\beta(1-q)(1-\varepsilon) + \mu)V = -k_2 V,$$

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Muhammad Rifki Nisardi, Sulma, Hukmah, Suriani, Syamsuddin Toaha

dengan  $k_2 = \beta(1 - q)(1 - \varepsilon) + \mu$ . Kemudian diperoleh

$$V(t) \geq V(0)e^{-k_2 t},$$

untuk  $t \rightarrow \infty$  mengakibatkan  $e^{-k_2 t} \rightarrow 0$ . Dengan kata lain

$$V(t) \geq 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty.$$

c) Dari persamaan ketiga dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\frac{dE}{dt} = \beta(1 - q)S \frac{I}{N} + \beta(1 - q)(1 - \varepsilon)V \frac{I}{N} - \sigma E - \mu E \geq -(\sigma + \mu)E,$$

Selanjutnya diperoleh

$$E(t) \geq E(0)e^{-(\sigma + \mu)t},$$

untuk  $t \rightarrow \infty$  mengakibatkan  $e^{-(\sigma + \mu)t} \rightarrow 0$ . Dengan kata lain

$$E(t) \geq 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty.$$

d) Dari persamaan keempat dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma(1 - q)I - q\alpha I - \mu I \geq -(\gamma(1 - q) + q\alpha + \mu)I = -k_3 V$$

dengan  $k_3 = \gamma(1 - q) + q\alpha + \mu$ . Kemudian diperoleh

$$I(t) \geq I(0)e^{-k_3 t},$$

untuk  $t \rightarrow \infty$  mengakibatkan  $e^{-k_3 t} \rightarrow 0$ . Dengan kata lain

$$I(t) \geq 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty.$$

e) Dari persamaan kelima dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\frac{dQ}{dt} = q\alpha I - \mu Q - \eta Q \geq -(\mu + \eta)Q.$$

Selanjutnya diperoleh

$$Q(t) \geq Q(0)e^{-(\mu + \eta)t},$$

untuk  $t \rightarrow \infty$  mengakibatkan  $e^{-(\mu + \eta)t} \rightarrow 0$ . Dengan kata lain

$$Q(t) \geq 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty.$$

f) Dari persamaan terakhir dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(1 - q)I + \eta Q - \mu R \geq -\mu R.$$

Selanjutnya diperoleh

$$R(t) \geq R(0)e^{-\mu t},$$

untuk  $t \rightarrow \infty$  mengakibatkan  $e^{-\mu t} \rightarrow 0$ . Dengan kata lain

$$R(t) \geq 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty.$$

Berdasarkan pembuktian pada poin a) – f), terbukti bahwa solusi Sistem (1.1) merupakan solusi yang *non-negative*. ■

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa solusi Sistem (1.1) terbatas. Diketahui bahwa  $N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ . Dari Sistem (1.1) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{dR}{dt}, \\ \frac{dN}{dt} &= \Lambda - \mu(S + V + E + I + Q + R), \end{aligned}$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N.$$

Karena  $N(t) \geq 0$  maka  $\frac{dN}{dt} \geq 0$  sehingga diperoleh  $0 \leq \Lambda - \mu N$  atau  $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ . Jadi terbukti bahwa solusi Sistem (1.1) terbatas. ■

## 2.1 Normalisasi Model

Sistem (1.1) merupakan model yang melibatkan populasi individu. Populasi individu dinyatakan dalam jumlah orang/individu dalam nilai yang besar. Untuk menyederhanakan perhitungan, maka setiap kompartemen dinyatakan sebagai berikut

$$x_1 = \frac{S}{N}, x_2 = \frac{V}{N}, x_3 = \frac{E}{N}, x_4 = \frac{I}{N}, x_5 = \frac{Q}{N}, x_6 = \frac{R}{N}. \quad (2.1)$$

dimana  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  menyatakan proporsi setiap kompartemen terhadap total populasi. Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.1) ke Sistem (1.1) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu - \theta x_1 - \beta(1-q)x_1 x_4 - \mu x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \theta x_1 - \beta(1-q)(1-\varepsilon)x_2 x_4 - \mu x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \beta(1-q)x_1 x_4 + \beta(1-q)(1-\varepsilon)x_2 x_4 - \sigma x_3 - \mu x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \sigma x_3 - \gamma(1-q)x_4 - q\alpha x_4 - \mu x_4, \\ \frac{dx_5}{dt} &= q\alpha x_4 - \mu x_5 - \eta x_5, \\ \frac{dx_6}{dt} &= \gamma(1-q)x_4 + \eta x_5 - \mu x_6. \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2.2 Titik Keseimbangan Model

Titik keseimbangan Sistem (2.2) diperoleh ketika

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, \frac{dx_3}{dt} = 0, \frac{dx_4}{dt} = 0, \frac{dx_5}{dt} = 0, \frac{dx_6}{dt} = 0.$$

Dalam kasus model penyebaran COVID-19, terdapat dua jenis titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan bebas penyakit ditandai dengan  $x_4 = 0$  yang bermakna tidak ada individu terinfeksi yang menularkan COVID-19 kepada individu lain. Dengan mengasumsikan  $x_4 = 0$  lalu mensubstitusikan nilai tersebut ke Sistem (2.2), diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0) = \left( \frac{\mu}{\mu + \theta}, \frac{\theta}{\mu + \theta}, 0, 0, 0, 0 \right), \quad (2.3)$$

Selain kondisi bebas penyakit, terdapat juga kondisi yang disebut sebagai kondisi endemik. Kondisi endemik terjadi ketika  $x_4 \neq 0$  yang bermakna bahwa masih terdapat individu terinfeksi yang dapat menularkan COVID-19 kepada individu lain dalam populasi. Sehingga dengan kata lain, COVID-19 masih akan terus ada dalam populasi. Adapun titik keseimbangan endemik untuk Sistem (2.2) diperoleh

$$X_1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*), \quad (2.4)$$

dengan  $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_5^*, x_6^*$  dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan yang bergantung pada  $x_4^*$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\mu}{\theta + \beta(1-q)x_4^* + \mu}, \\ x_2^* &= \frac{\mu\theta}{(\beta(1-q)x_4^* + (\mu + \theta))(\beta(1-\varepsilon)(1-q)x_4^* + \mu)}, \\ x_3^* &= c_1 x_4^*, \\ x_5^* &= c_2 x_4^*, \\ x_6^* &= c_3 x_4^*, \end{aligned} \quad (2.5)$$

dimana  $c_1 = \frac{\gamma(1-q)+\alpha q+\mu}{\sigma}$ ,  $c_2 = \frac{\alpha q}{\mu+\eta}$ ,  $c_3 = \frac{\gamma(1-q)+\mu c_2}{\mu}$ . Kondisi endemik terjadi ketika  $x_4^* > 0$ . Hal tersebut dapat diperoleh dari akar real positif dari polynomial  $P(x)$  berderajat tiga berikut

$$P(x) = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0, \quad (2.6)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_1 &= \beta^2(1-q)^2(1-\varepsilon)(\sigma + \mu)c_1, \\ A_2 &= c_1(\sigma + \mu)(\beta(1-\varepsilon)(1-q)(\sigma + \mu) + \beta(1-q)), \\ A_3 &= \mu(\sigma + \mu)(\theta + \mu)c_1 - \beta^2(1-q)^2(1-\varepsilon)\mu. \\ A_4 &= -\beta(1-q)\mu^2 - \beta(1-\varepsilon)\mu\theta. \end{aligned}$$

### 2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar akan dihitung dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM). Misalkan  $F_i(x)$  adalah laju penambahan infeksi baru dan  $V_i(x)$  adalah laju perpindahan individu, sehingga diperoleh  $F_i(x)$  dan  $V_i(x)$  sebagai berikut

$$F_i = \begin{pmatrix} \beta(1-q)x_1x_4 + \beta(1-q)(1-\varepsilon)x_2x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$V_i = \begin{pmatrix} \sigma x_3 + \mu x_3 \\ -\sigma x_3 + \gamma(1-q)x_4 + q\alpha x_4 + \mu x_4 \\ -q\alpha x_4 + \mu x_5 + \eta x_5 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Kemudian, diperoleh matriks  $F$  dan  $V$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial F_i}{\partial (x_3, x_4, x_5)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta(1-q)x_1 + \beta(1-q)(1-\varepsilon)x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta(1-q)\mu}{\mu + \theta} + \frac{\beta(1-q)(1-\varepsilon)\theta}{\mu + \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$V = \frac{\partial V_i}{\partial (x_3, x_4, x_5)} = \begin{pmatrix} \sigma + \mu & 0 & 0 \\ -\sigma & \gamma(1-q) + q\alpha + \mu & 0 \\ 0 & -q\alpha & \mu + \eta \end{pmatrix},$$

Selanjutnya, invers dari matriks  $V$  adalah

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma + \mu} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma}{(\sigma + \mu)(\gamma(1-q) + q\alpha + \mu)} & \frac{1}{\gamma(1-q) + q\alpha + \mu} & 0 \\ \frac{\sigma q\alpha}{(\mu + \eta)(\gamma(1-q) + q\alpha + \mu)(\sigma + \mu)} & \frac{q\alpha}{(\mu + \eta)(\gamma(1-q) + q\alpha + \mu)} & \frac{1}{\mu + \eta} \end{pmatrix},$$

Dari matriks  $F$  dan  $V^{-1}$  yang telah didapatkan, diperoleh matriks

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\sigma(1-q)(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} & \frac{\beta(1-q)(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Matriks  $FV^{-1}$  tersebut merupakan matriks generasi yang memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - FV^{-1}) = 0,$$

$$\left( \lambda - \frac{\beta\sigma(1-q)(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} \right) \lambda^2 = 0. \quad (2.9)$$

Dari persamaan karakteristik (2.9), diperoleh akar-akar karakteristik yaitu  $\lambda_1 = \frac{\beta\sigma(1-q)(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)}$ ,  $\lambda_{2,3} = 0$ . Karena nilai bilangan reproduksi dasar adalah *radius spectral* dari  $FV^{-1}$  atau dengan kata lain  $R_0 = \max(\lambda_i)$ , maka diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta(1-q)\sigma(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)}. \quad (2.10)$$

## 2.4 Analisis Sensitivitas Parameter terhadap $R_0$

Analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar dilakukan untuk mengetahui pengaruh suatu parameter terhadap bilangan reproduksi dasar tersebut. Dalam kasus ini, variabel yang akan diukur adalah bilangan reproduksi dasar model penyebaran COVID-19 terhadap beberapa parameter terkait. Selanjutnya akan dianalisis efek dari beberapa parameter terhadap bilangan reproduksi dasar sebagai berikut

1) Parameter  $\beta$  terhadap  $R_0$

$$C_{\beta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{R_0},$$

$$C_{\beta}^{R_0} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\beta\sigma(1-q)(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} \right) \times \frac{\beta}{\frac{\beta(1-q)\sigma(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)}} = 1$$



$$C_{\beta}^{R_0} > 0$$

Analisis sensitivitas parameter  $\beta$  terhadap  $R_0$  menunjukkan nilai positif yang berarti peningkatan parameter  $\beta$  berbanding lurus dengan peningkatan  $R_0$ . Index sensitivitas sebesar 1 menunjukkan bahwa kenaikan nilai  $\beta$  100% akan mengakibatkan kenaikan nilai  $R_0$  sebesar 100%.

2) Parameter  $\theta$  terhadap  $R_0$

$$C_{\theta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \times \frac{\theta}{R_0},$$

$$C_{\theta}^{R_0} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\beta \sigma ((1-q)\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} \right) \times \frac{\theta}{\frac{\beta \sigma ((1-q)\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)}},$$

$$C_{\theta}^{R_0} = -\frac{\varepsilon \mu \theta}{(\mu + \theta(1-\varepsilon))(\mu + \theta)}.$$

Analisis sensitivitas parameter  $\theta$  terhadap  $R_0$  menunjukkan nilai negatif. Index sensitivitas negatif berarti hubungan antara perubahan nilai parameter  $\theta$  dan  $R_0$  berbanding terbalik. Peningkatan nilai parameter  $\theta$  mengakibatkan penurunan nilai dari  $R_0$ .

3) Parameter  $\varepsilon$  terhadap  $R_0$

$$C_{\varepsilon}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon} \times \frac{\varepsilon}{R_0},$$

$$C_{\varepsilon}^{R_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\beta(1-q)\sigma(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} \right) \times \frac{\varepsilon}{\frac{\beta(1-q)\sigma(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)}},$$

$$C_{\varepsilon}^{R_0} = -\frac{\beta(1-q)\theta\varepsilon}{\beta(1-q)\mu + \beta(1-q)(1-\varepsilon)\theta} < 0.$$

Analisis sensitivitas parameter  $\varepsilon$  terhadap  $R_0$  menunjukkan nilai yang negatif. Hal tersebut berarti hubungan antara perubahan nilai parameter  $\varepsilon$  dan  $R_0$  berbanding terbalik. Peningkatan nilai parameter  $\varepsilon$  mengakibatkan penurunan nilai dari  $R_0$  dan sebaliknya.

4) Parameter  $q$  terhadap  $R_0$

$$C_q^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial q} \times \frac{q}{R_0},$$

$$C_q^{R_0} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\beta(1-q)\sigma(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)} \right) \times \frac{q}{\frac{\beta(1-q)\sigma(\mu + \theta(1-\varepsilon))}{(\sigma + \mu)(\theta + \mu)(\mu + \alpha q + (1-q)\gamma)}},$$

$$C_q^{R_0} = -\frac{q(\mu + \alpha)}{(1-q)(\mu + (1-q)\gamma + q\alpha)}.$$

Berdasarkan hasil analisis sensitivitas parameter  $q$  terhadap  $R_0$ , diperoleh hasil yang menunjukkan nilai indeks yang negatif. Hal tersebut berarti hubungan antara perubahan nilai parameter  $q$  dan  $R_0$  berbanding terbalik. Peningkatan nilai parameter  $q$  mengakibatkan penurunan nilai dari  $R_0$  dan sebaliknya.

## 2.5 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Sistem (2.2) dapat diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\theta - \beta(1-q)x_4 - \mu & 0 & 0 & -\beta(1-q)x_1 & 0 & 0 \\ \theta & -\beta(1-q)(1-\varepsilon)x_4 - \mu & 0 & -\beta(1-q)(1-\varepsilon)x_2 & 0 & 0 \\ \beta(1-q)x_4 & \beta(1-q)(1-\varepsilon)x_4 & -\sigma - \mu & \beta(1-q)(x_1 + (1-\varepsilon)x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\gamma(1-q) - q\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha & -\mu - \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(1-q) & \eta & -\mu \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Substitusi titik kesetimbangan bebas penyakit pada Persamaan (2.3), maka diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\theta - \mu & 0 & 0 & -\beta(1-q)\frac{\mu}{\mu+\theta} & 0 & 0 \\ \theta & -\mu & 0 & -\beta(1-q)(1-\varepsilon)\frac{\theta}{\mu+\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma - \mu & \frac{\beta(1-q)(\mu+(1-\varepsilon)\theta)}{\mu+\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\gamma(1-q) - q\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha & -\mu - \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(1-q) & \eta & -\mu \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

Dengan misalkan

$$k_1 = \beta(1-q)\frac{\mu}{\mu+\theta}, \quad k_2 = \beta(1-q)(1-\varepsilon)\frac{\theta}{\mu+\theta}$$

Selanjutnya diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\theta - \mu & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ \theta & -\mu & 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma - \mu & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\gamma(1-q) - q\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha & -\mu - \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(1-q) & \eta & -\mu \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Dari Persamaan (2.13), persamaan karakteristik diperoleh dari  $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$ . Kemudian diperoleh

$$(\lambda + \theta + \mu)(\lambda + \mu)^2(\lambda + \eta + \mu)(\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) = 0, \quad (2.14)$$

dengan

$$A_1 = 2\mu + \sigma + \gamma(1-q) + q\alpha,$$

$$A_2 = \mu^2 + (\sigma + \gamma(1-q) + q\alpha)\mu + (\gamma(1-q) + q\alpha - k_1 - k_2)\sigma.$$

Berdasarkan Persamaan (2.14), diperoleh enam nilai eigen yang didefinisikan sebagai berikut

$$\lambda_1 = -\theta - \mu,$$

$$\lambda_{2,3} = -\mu,$$

$$\lambda_4 = -\eta - \mu.$$

Karena setiap parameter yang digunakan dalam Sistem (2.2) bernilai positif, mengakibatkan untuk  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$  bernilai negatif. Hal tersebut membuat kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit bergantung pada nilai eigen  $\lambda_5$  dan  $\lambda_6$  yang diperoleh dari persamaan

$$P(\lambda) = \lambda^2 + B_1\lambda + B_2 = 0. \quad (2.15)$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz,  $P(\lambda)$  memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika memenuhi

$$D_1 > 0, D_2 > 0,$$

- Untuk syarat pertama

$$D_1 = B_1,$$

$$D_1 = 2\mu + \sigma + \gamma(1 - q) + q\alpha.$$

Karena setiap parameter bernilai positif, maka jelas bahwa  $D_1 > 0$ .

- Untuk syarat kedua

$$D_2 = \begin{vmatrix} B_1 & 0 \\ 1 & B_2 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = B_1 B_2 > 0.$$

Karena  $B_1 > 0$ , maka akan dipenuhi  $D_2 > 0$  jika dan hanya jika  $\gamma(1 - q) + q\alpha > k_1 + k_2$ .

Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik, substitusi titik kesetimbangan endemik (2.4) pada matriks Jacobi (2.11), diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\theta - \beta(1 - q)x_4^* - \mu & 0 & 0 & -\beta(1 - q)x_1^* & 0 & 0 \\ \theta & -\beta(1 - q)(1 - \varepsilon)x_4^* - \mu & 0 & -\beta(1 - q)(1 - \varepsilon)x_2^* & 0 & 0 \\ \beta(1 - q)x_4^* & \beta(1 - q)(1 - \varepsilon)x_4^* & -\sigma - \mu & \beta(1 - q)(x_1^* + (1 - \varepsilon)x_2^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\gamma(1 - q) - q\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha & -\mu - \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(1 - q) & \eta & -\mu \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Kemudian, dengan melakukan pemisalan untuk penyederhanaan diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -m_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ \theta & -(m_2 + \mu) & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ b_1 & m_2 & -m_3 & c_1 + c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha & -m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(1 - q) & \eta & -\mu \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

dengan

$$b_1 = \beta(1 - q)x_4^*,$$

$$c_1 = \beta(1 - q)x_1^*,$$

$$c_2 = \beta(1 - q)(1 - \varepsilon)x_2^*,$$

$$m_1 = \theta + b_1 + \mu,$$

$$m_2 = b_1(1 - \varepsilon),$$

$$m_3 = \sigma + \mu,$$

$$m_4 = \gamma(1 - q) + q\alpha + \mu,$$

$$m_5 = \mu + \eta.$$

Berdasarkan Persamaan (2.17), diperoleh enam nilai eigen dengan dua nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\eta - \mu, \\ \lambda_2 &= -\mu.\end{aligned}$$

Untuk  $\lambda_{3,4,5,6}$  diperoleh dari persamaan karakteristik berikut

$$W(\lambda) = \lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4 = 0, \quad (2.18)$$

dimana

$$D_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \mu,$$

$$D_2 = (m_2 + m_3 + m_4 + \mu)m_1 - (c_1 + c_2)\sigma + (m_3 + m_4)\mu + (m_3 + m_4)m_2 + m_3m_4,$$

$$D_3 = ((m_3 + m_4)\mu + (m_3 + m_4)m_2 + m_3m_4 - (c_1 + c_2)\sigma)m_1 + (c_1(b_1 - m_2) - (c_1 + c_2)\mu)\sigma + m_3m_4(m_2 + \mu),$$

$$D_4 = ((- (c_1 + c_2)\mu - c_1m_2)\sigma + m_3m_4(m_2 + \mu))m_1 + (b_1\mu + m_2(\theta + b_1))\sigma c_1.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz,  $P(\lambda)$  memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan

$$\text{hanya jika memenuhi } D_1 > 0, \begin{vmatrix} D_1 & D_3 \\ 1 & D_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} D_1 & D_3 & 0 \\ 1 & D_2 & D_4 \\ 0 & D_1 & D_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\text{dan } \begin{vmatrix} D_1 & D_3 & 0 & 0 \\ 1 & D_2 & D_4 & 0 \\ 0 & D_1 & D_3 & 0 \\ 0 & 1 & D_2 & D_4 \end{vmatrix} > 0.$$

## 2.6 Simulasi Numerik

Estimasi parameter adalah pendugaan karakteristik populasi (parameter) dengan menggunakan karakteristik sampel (statistik). Dalam model ini, terdapat beberapa parameter yang nilainya akan diestimasi menggunakan data yang telah dikumpulkan dari situs kawalcovid19.id. Data tersebut merupakan data harian COVID-19 untuk daerah Indonesia terhitung dari interval waktu 01 April 2022 - 01 Juli 2022. Estimasi nilai parameter model dilakukan dengan meminimalkan fungsi tujuan dari fungsi nonlinier multivariabel dengan bantuan toolbox 'fmincon' pada Matlab. Data COVID-19 yang digunakan pada esetimasi parameter adalah jumlah kasus aktif yang didefinisikan sebagai

$$A = K - M - S,$$

dimana

$A$  = kasus aktif COVID-19,

$K$  = kasus konfirmasi COVID-19,

$M$  = kasus meninggal COVID-19,

$S$  = kasus sembuh COVID-19.

Hasil yang diperoleh dari estimasi parameter tersebut akan digunakan dalam memodelkan Sistem (2.2). Adapun beberapa parameter dan nilai awal yang diperoleh dapat dilihat dalam Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 sebagai berikut

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Muhammad Rifki Nisardi, Sulma, Hukmah, Suriani, Syamsuddin Toaha**

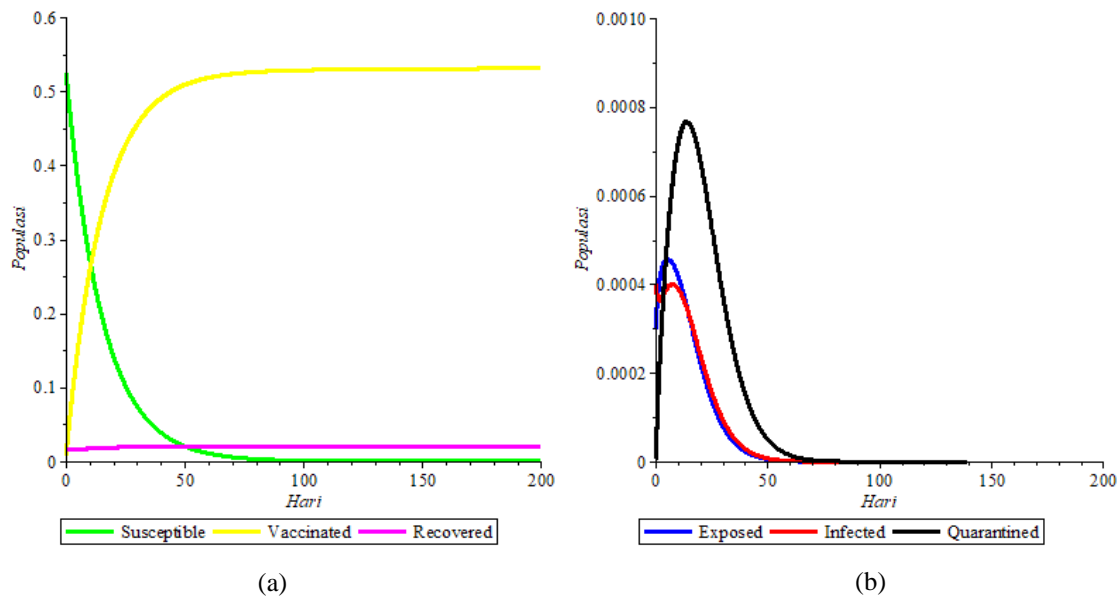
**Tabel 2.1** Nilai Parameter dari Sistem (2.2)

Parameter	Nilai	Sumber
$\mu$	$\frac{1}{365 \cdot 69} = 0.0000397$	Diestimasi
$\varepsilon$	0.7	Asumsi
$\theta$	0.06513	Diestimasi
$\beta$	3.6086	Diestimasi
$q$	0.7395	Diestimasi
$\sigma$	0.3879	Diestimasi
$\gamma$	0.1469	Diestimasi
$\alpha$	0.5572	Diestimasi
$\eta$	0.17614	Diestimasi

**Tabel 2.2** Nilai Awal Variabel dari Sistem (2.2)

Kompartemen	Nilai Awal	Sumber
$N$	273.500.000	Asumsi
$S_0$	143,476.067	Diestimasi
$V_0$	1.953.431	Diestimasi
$E_0$	83.928	Diestimasi
$I_0$	99.999	Diestimasi
$Q_0$	1401	Diestimasi
$R_0$	4.546.441	Diestimasi

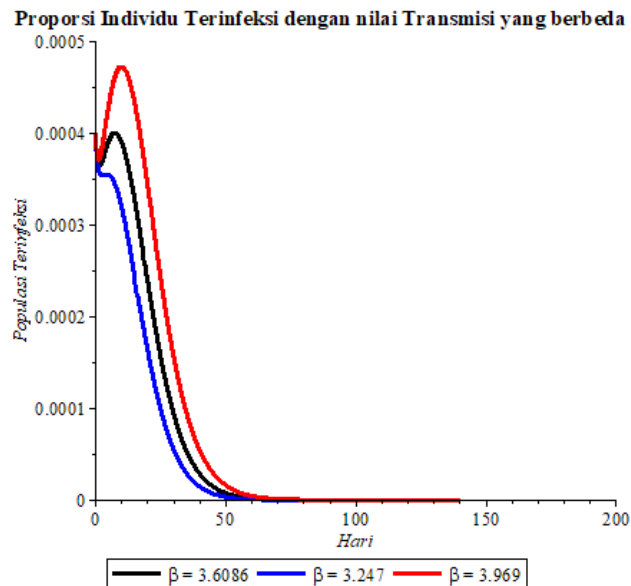
Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel (2.1), (2.2) dan masing-masing nilai awal  $x_1 = 0.5246$ ,  $x_2 = 0.0071$ ,  $x_3 = 0.0003$ ,  $x_4 = 0.0004$ ,  $x_5 = 0.000005$ ,  $x_6 = 0.0166$ , diperoleh titik kesetimbangan non endemik  $T_1 = \{x_1 = 0.0006091, x_2 = 0.9993908212, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0\}$  dengan nilai eigen pada titik kesetimbangan tersebut adalah  $\lambda_1 = -0.00004$ ,  $\lambda_2 = -0.06517$ ,  $\lambda_3 = -0.0000397$ ,  $\lambda_4 = -0.17618$ ,  $\lambda_5 = -0.751596$ ,  $\lambda_6 = -0.0866998$ . Karena semua nilai eigen bernilai negatif maka berdasarkan syarat kestabilan titik kesetimbangan non endemik adalah stabil asimtotik. Diperoleh nilai  $R_0 = 0.6270232908$  yang menunjukkan bahwa selama masa infeksi terjadi interaksi tidak menghasilkan kasus sekunder dari kasus primer tersebut, dengan kata lain besaran tersebut menunjukkan bahwa solusi akan menuju kepada titik kesetimbangan non endemik.



**Gambar 2.1** Grafik perubahan kompartemen Susceptible ( $S$ ), Vaccinated ( $V$ ), Exposed ( $E$ ), Infected ( $I$ ), Quarantine ( $Q$ ), dan Recovered ( $R$ )

Gambar 2.1. (a) menunjukkan bahwa populasi *Susceptible* ( $S$ ) yakni populasi rentan yang tidak divaksinasi berkurang sejak awal, dikarenakan adanya perpindahan dari populasi  $S$  ke *Vaccinated* ( $V$ ) dan kompartemen *Exposed* ( $E$ ) sehingga menuju ke nol disekitar  $t = 100$  hari. Kemudian, populasi *Vaccinated* ( $V$ ) bertambah karena bertambahnya jumlah populasi yang divaksin begitupun dengan populasi *Recovered* ( $R$ ) yang bertambah sejak awal kemudian menuju ke titik kesetimbangan karena adanya laju kesembuhan dari populasi  $I$  dan  $V$ . Gambar 2.1 (b) menunjukkan bahwa populasi *Exposed* ( $E$ ) bertambah sejak awal (dari nilai awal yang diberikan) mencapai titik puncak karena ada perpindahan dari kompartemen *Susceptible* ( $S$ ), kemudian kembali berkurang di sekitar  $t = 10$  hari kemudian menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit disekitar  $t = 50$  hari. Selanjutnya, populasi *Infected* ( $I$ ) yang awalnya berkurang kemudian bertambah dan kembali berkurang di sekitar  $t = 10$  hari dikarenakan adanya tingkat kesembuhan secara alami sehingga berpindah ke kompartemen *Recovered* ( $R$ ). Begitupun dengan kompartemen *Quarantined* ( $Q$ ) yang awalnya bertambah sehingga mencapai titik puncak dan berkurang disekitar  $t = 20$  hari kemudian menuju ke nol disekitar  $t = 70$  hari. Berkurangnya populasi yang dikarantina sehingga menuju ke nol, tidak lain karena disekitar  $t \geq 50$  hari jumlah populasi *Exposed* ( $E$ ) dan *Infected* ( $I$ ) terlebih dahulu menuju ke nol. Sehingga, berdasarkan grafik diperoleh bahwa untuk  $t \geq 70$  hari tidak perlu lagi ada pembatasan interaksi antara populasi karena populasi terinfeksi sudah tidak ada di dalam sistem.

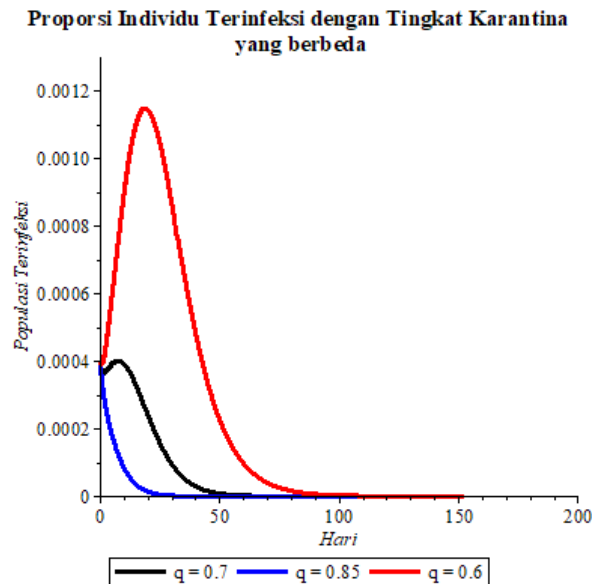
**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Muhammad Rifki Nisardi, Sulma, Hukmah, Suriani, Syamsuddin Toaha**



**Gambar 2.2** Grafik perubahan populasi terinfeksi dengan nilai parameter  $\beta$  yang berbeda

Pada Gambar 2.2, diberikan simulasi yang menunjukkan bahwa untuk nilai  $\beta = 3.6086$  dan  $\beta = 3.969$  jumlah populasi terinfeksi awalnya berkurang kemudian kembali bertambah disekitar  $t = 10$  hari, kemudian kembali berkurang disekitar  $t = 20$  hari. Dari kedua grafik tersebut terlihat bahwa semakin tinggi nilai parameter  $\beta$  maka jumlah populasi terinfeksi akan bertambah dari nilai awal yang diberikan. Dengan kata lain, semakin tinggi laju interaksi antara populasi rentan dan terinfeksi maka jumlah orang yang terinfeksi akan bertambah, tetapi kembali berkurang dikarenakan adanya kebijakan karantina dan laju kesembuhan alami pada populasi terinfeksi. Sedangkan, untuk nilai  $\beta = 3.247$  menunjukkan bahwa populasi terinfeksi berkurang sejak awal dan menuju ke nol disekitar  $t = 50$  hari. Artinya, populasi terinfeksi akan lebih cepat berkurang jika laju interaksi semakin kecil.

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Muhammad Rifki Nisardi, Sulma, Hukmah, Suriani, Syamsuddin Toaha**



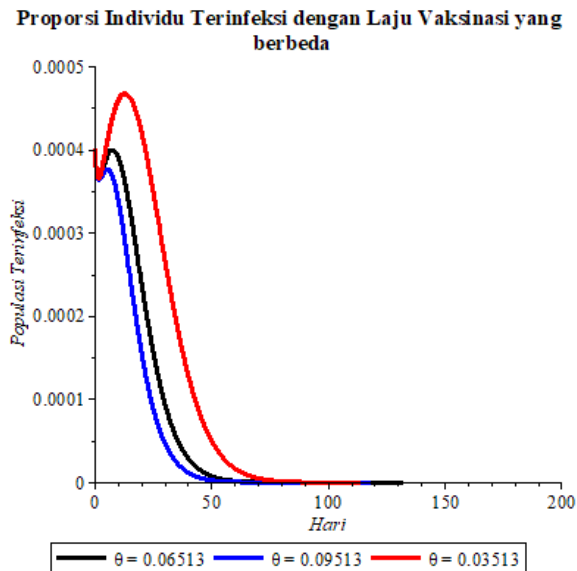
**Gambar 2.3** Grafik perubahan populasi terinfeksi dengan nilai parameter  $q$  yang berbeda

Grafik populasi terinfeksi pada Gambar 2.3, menunjukkan untuk nilai  $q = 0.85$  yang berarti bahwa jika sebanyak 85% populasi dikarantina mengakibatkan populasi terinfeksi akan berkurang sejak awal. Akan tetapi, jika nilai parameter  $q$  dikurangi akibatnya populasi terinfeksi semakin lambat menuju nol. Berdasarkan simulasi pada Gambar 2.3 terlihat bahwa jika hanya 60% populasi yang dikarantina maka populasi terinfeksi akan bertambah sejak awal waktu, dan kemudian berkurang disekitar  $t = 30$  hari. Oleh karena itu, tingkat karantina perlu diberikan dalam proporsi yang cukup besar agar dapat menekan peningkatan jumlah populasi terinfeksi.

Hasil yang diperoleh dari simulasi tersebut sejalan dengan yang diperoleh pada penelitian [1]. Simulasi dengan skema penurunan laju interaksi suatu populasi dapat berupa *social distancing*, serta peningkatan proporsi karantina mampu menurunkan jumlah infeksi COVID-19. Sebaliknya, skenario peningkatan nilai parameter  $\beta$  berarti adanya interaksi individu yang lebih banyak yang diakibatkan oleh perenggangan *social distancing* serta penurunan proporsi individu yang dikarantina memberikan dampak peningkatan jumlah individu terinfeksi COVID-19.



**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Muhammad Rifki Nisardi, Sulma, Hukmah, Suriani, Syamsuddin Toaha**



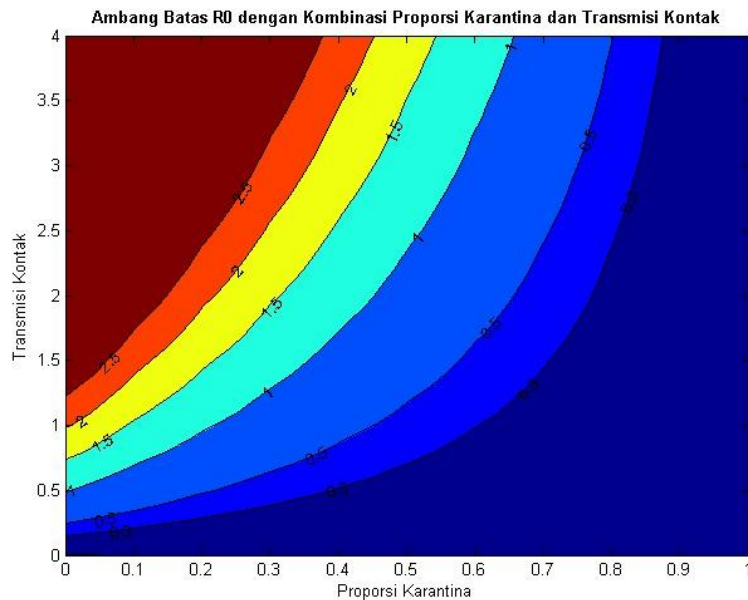
**Gambar 2.4** Grafik perubahan populasi terinfeksi dengan nilai parameter  $\theta$  yang berbeda.

Gambar 2.4 menunjukkan pengaruh pemberian vaksinasi sebagai tindakan preventif untuk mencegah bertambahnya jumlah populasi yang terinfeksi. Untuk nilai  $\theta = 0.09513$  memberikan pengaruh terhadap pengurangan populasi terinfeksi sejak awal, akan tetapi jika nilainya dikurangi menjadi  $\theta = 0.06513$  akibatnya populasi terinfeksi yang berkurang tidak secepat nilai  $\theta = 0.09513$ . Sedangkan, jika diberikan nilai  $\theta = 0.03$  artinya tingkat vaksinasi sangat sedikit sehingga mengakibatkan terjadinya kenaikan populasi terinfeksi dari nilai awal yang diberikan.

Hasil yang diperoleh sejalan dengan penelitian [8]. Peningkatan tingkat vaksinasi dalam populasi mampu mengurangi jumlah individu terinfeksi COVID-19. Sebaliknya, tingkat vaksinasi yang mengecil diartikan sebagai vaksinasi yang melambat dapat menjadi penyebab kenaikan jumlah individu terinfeksi COVID-19. Dengan demikian, masyarakat perlu menyadari akan pentingnya melakukan vaksinasi untuk meningkatkan sistem kekebalan tubuh sehingga mengurangi resiko terinfeksi COVID-19.

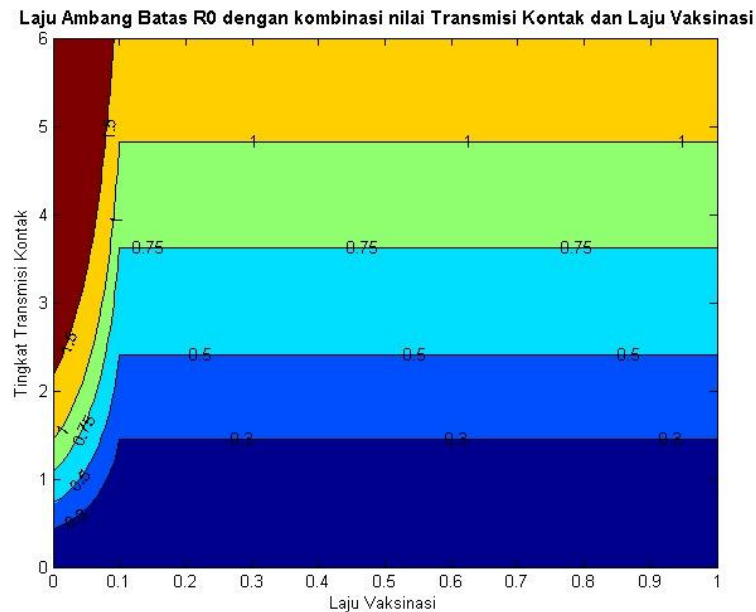
Kemudian, pada Gambar 2.5-2.7 diberikan skenario simulasi yang melibatkan tiga nilai parameter yaitu transmisi kontak, proporsi karantina dan tingkat vaksinasi. Simulasi dibuat dengan melakukan perubahan terhadap dua nilai parameter dan menetapkan nilai parameter lainnya sesuai dengan Tabel 2.1 lalu menghubungkannya dengan nilai ambang batas  $R_0$ . Simulasi tersebut menghasilkan gambaran tentang nilai  $R_0$  (direpresentasikan dengan garis hitam) dengan berbagai kemungkinan skenario perubahan dari parameter-parameter terkait.

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Muhammad Rifki Nisardi, Sulma, Hukmah, Suriani, Syamsuddin Toaha**



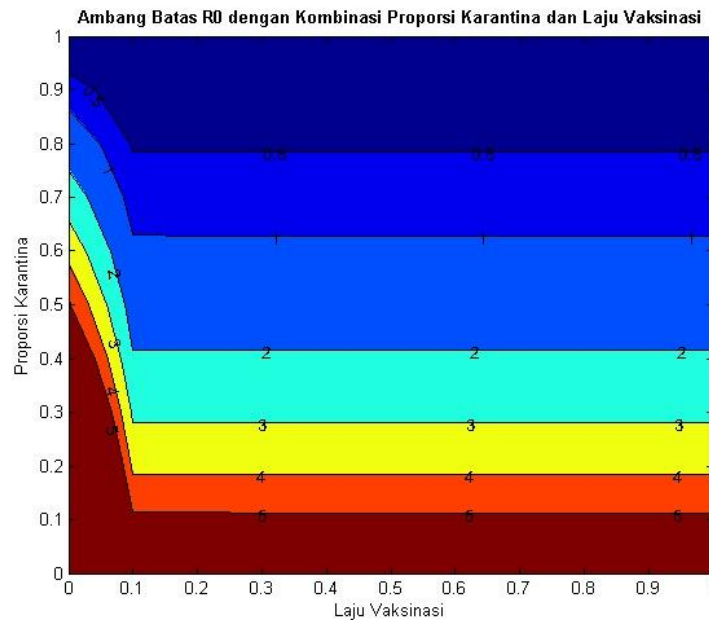
**Gambar 2.5** Ambang batas  $R_0$  dengan kombinasi proporsi Karantina dan Transmisi kontak

Kondisi bebas penyakit dapat dicapai apabila nilai  $R_0 < 1$ . Pada Gambar 2.5, nilai  $R_0 < 1$  diperoleh pada kombinasi nilai proporsi karantina dan transmisi kontak berada di bagian kanan garis  $R_0 = 1$ . Misalnya pada titik koordinat  $(q, \beta) = (0.7, 4)$ ,  $(0.9, 4)$ . Artinya pada proporsi karantina tertentu tingkat transmisi kontak antara populasi yang rentan dan terinfeksi dapat ditoleransi sehingga nilai  $R_0$  masih dapat terkendali. Dengan demikian penyebaran penyakit dapat terkendali menuju kondisi bebas penyakit.



**Gambar 2.6** Ambang batas  $R_0$  dengan kombinasi laju vaksinasi dan Transmisi kontak

Pada Gambar 2.6, nilai  $R_0 < 1$  diperoleh pada kombinasi nilai laju vaksinasi dan tingkat transmisi kontak berada di bawah garis  $R_0 = 1$ . Misalnya pada titik koordinat  $(\theta, \beta) = (0.7, 4.3)$ ,  $(0.3, 0.5)$ . Jadi laju vaksinasi yang tinggi mampu menekan nilai  $R_0$  sehingga laju penyebaran penyakit menurun meskipun tingkat transmisi kontak antara populasi rentan dan terinfeksi cenderung meningkat.



**Gambar 2.7** Ambang batas  $R_0$  dengan kombinasi proporsi Karantina dan Transmisi kontak.

Kemudian, pada Gambar 2.7, nilai  $R_0 < 1$  diperoleh pada kombinasi nilai laju vaksinasi dan proporsi karantina berada di atas garis  $R_0 = 1$ . Misalnya pada titik koordinat  $(\theta, q) = (0.1, 0.7)$ ,  $(0.8, 0.9)$ . Nilai  $R_0$  akan cenderung menurun jika laju vaksinasi dan proporsi karantina ditingkatkan sehingga penyebaran penyakit cenderung menurun.

### 3. KESIMPULAN

Analisis model matematika SEIR-VQ pada penyebaran penyakit COVID-19 dengan karantina dan vaksinasi menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemik dan non-endemik. Analisis sensitivitas parameter transmisi kontak ( $\beta$ ) menunjukkan hasil yang positif yang berarti peningkatan nilai  $\beta$  mengakibatkan nilai  $R_0$  juga akan mengalami peningkatan. Sebaliknya indeks sensitivitas pada parameter laju vaksinasi ( $\theta$ ), efikasi vaksin ( $\varepsilon$ ), dan proporsi karantina ( $q$ ) menunjukkan hasil yang negatif yang berarti peningkatan nilai parameter  $\theta$ ,  $\varepsilon$  dan  $q$  mengakibatkan penurunan terhadap  $R_0$ .

Berdasarkan simulasi numerik, perubahan parameter proporsi karantina dan laju vaksinasi memberikan pengaruh terhadap penyebaran penyakit COVID-19. Jika parameter  $q$  dan  $\theta$  mengalami kenaikan, maka populasi terinfeksi akan semakin berkurang. Sebaliknya Jika parameter  $\beta$  mengalami kenaikan, maka populasi terinfeksi akan semakin meningkat.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aldila, D., Khoshnaw, S., Safitri, E., Anwar, Y., Bakry, A., Samiadji, B., Anugerah, D., Alfarizi, F., Dayanah Ayulani, I., & Salim, S., 2020. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment : The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110042.
- [2] Annas, S., Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S., 2020. Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139.
- [3] Attaullah, & Sohaib, M., 2020. Mathematical modeling and numerical simulation of HIV infection model. *Results in Applied Mathematics*, 7.
- [4] Cassels, S., Clark, S. J., & Morris, M., 2008. Mathematical Models for HIV Transmission Dynamics: Tools for Social and Behavioral Science Research NIH Public Access. *J Acquir Immune Defic Syndr*, 47(1), 34–39.
- [5] Chávez, J., Goetz, T., Siegmund, S., & Wijaya, K., 2017. An SIR-Dengue transmission model with seasonal effects and impulsive control. *Mathematical Biosciences*, 289.
- [6] Chitnis, N., Hyman, J., & Cushing, J., 2008. Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 70, 1272–1296.
- [7] Hartati, H., Toaha, S., & Kasbawati, K., 2019. Stability analysis of SEISEIR-SEI modelling on the dynamics of spread dengue fever with vaccination and insecticide. *Journal of Physics: Conference Series*, 1341, 062033.
- [8] Iboi, E., Ngonghala, C., & Gumel, A., 2020. Will an imperfect vaccine curtail the COVID-19 pandemic in the U.S.? *Infectious Disease Modelling*, 5.
- [9] Mwalili, S., Kimathi, M., Ojiambo, V., Gathungu, D., & Mbogo, R. 2020. SEIR model for COVID-19 dynamics incorporating the environment and social distancing. *BMC Research Notes*, 13.
- [10] Ndairou, F., Area, I., Nieto, J., & Torres, D. F. M., 2020. *Mathematical Modeling of COVID-19 Transmission Dynamics with a Case Study of Wuhan*.
- [11] Nisardi, M. R., Kasbawati, K., Khaeruddin, K., Robinet, A., & Chetehouna, K., 2022. Fractional Mathematical Model of Covid-19 with Quarantine. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(1), 33–48.
- [12] Sulma, S., Toaha, S., & Kasbawati, K., 2020. Stability Analysis of Mathematical Models of the Dynamics of Spread of Meningitis with the Effects of Vaccination, Campaigns and Treatment. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 17, 71–81.
- [13] Suriani, S., Toaha, S., & Kasbawati, K., 2020. MSEICR Fractional Order Mathematical Model of The Spread Hepatitis B. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 17, 314–324.
- [14] Zakary, O., Sara, B., Rachik, M., & Ferjouchia, H., 2020. Mathematical Model to Estimate and Predict the COVID-19 Infections in Morocco: Optimal Control Strategy. *Journal of Applied Mathematics*, 2020, 1–13.